I СЕМЕСТР

1. Доказать что джойн S^n и S^m гомеоморфен S^{m+n+1}.

2. Вычислить фундаментальные группы пространств $U(n)$, $SU(n)$, $GL(n, C)$, $SL(n, R)$.

3. Сколько существует неизоморфных накрытий над T^2? Над S^1?

4. Какие из следующих пространств гомеоморфны между собой: a) $SO(n, 3)$, b) RP^3, c) $SU(2)$, d) пространство ортогональных реперов в R^3, e) S^3?

5. Доказать, что риманова поверхность с выброшенной точкой гомотопически эквивалентна одномерному комплексу.

6. Каково минимальное число критических точек функции Морса на сфере с k ручками?

7. Топологический тип кривой $\{x^n + y^n + z^n = 0\} \subset CP^2$.

8. Построить гомотопическую эквивалентность цилиндра и листа Мебиуса.

9. Каково минимальное число клеток в клеточном разбиении $G_k(R^n)$? $G_k(C^n)$?

10. Существует ли структура клеточного пространства на факторпространстве R/Q?

11. Вычислить первые три гомотопические группы букета $S^1 \vee S^2 \vee S^3$.

12. Существует ли клеточная структура на факторпространстве несвязного объединения двух экземпляров отрезка $[-1, 1]$ по очевидному отождествлению полуинтервалов $[-1, 0)$?

13. Доказать существование пространств $K(\pi, n)$ для всех π и n.

14. Сколько k-мерных клеток может быть у пространства $K(Z, 2)$ при различных k?

15. Вычислить фундаментальную группу дополнения в C^2 к кривой $x^2 = y^3$.

16. Если X- топологическая группа, то $\pi_1(X)$ коммутативна.

17. $\pi_{2k+1}(CP^k) =?$

18. Сколько существует неизоморфных расслоений над S^2 со слоем S^1?

19. Сколько существует неизоморфных расслоений над S^3 со слоем S^2?

20. Доказать 5-лемму.

21. Доказать точность гомотопической последовательности расслоения.

22. Любые два пространства $K(\pi, n)$ с данными π, n слабо гомотопически эквивалентны.

23. Вычислить группу $H_*(X * Y)$ через $H_*(X)$ и $H_*(Y)$.

24. Доказать, что любая связная компонента пространства $\Omega^2 S^2$ слабо гомотопически эквивалентна $\Omega^2 S^3$.

25. Вычислить $H_*(G_2(R^4), Z)$.

26. Вычислить $H_*(O(3, R); Z)$ и $H_*(O(4, R); Z)$.

27. Вычислить гомологии пространства единичных касательных векторов к S^2.

28. Доказать, что одномерный CW-комплекс есть пространство типа $K(\pi, 1)$.

29. Доказать, что любое связное двумерное многообразие без края есть пространство типа $K(\pi, 1)$.

30. Доказать, что отрезок не гомеоморфен кресту.

31. Доказать гомотопические эквивалентности $GL(n, R) \sim O(n, R)$, $SL(n, R) \sim SO(n, R)$, $GL(n, C) \sim U(n)$, $SL(n, C) \sim SU(n)$.

32. Доказать, что множество точек в C^n с попарно различными координатами есть пространство типа $K(\pi, 1)$.

33. Доказать, что пространство неупорядоченных наборов из k точек в R^2 есть пространство типа $K(\pi, 1)$.

34. Верно ли, что если X – замкнутое топологическое пространство а Y – его замкнутое подпространство, то $\pi_*(X, Y) \simeq \pi_*(X/Y)$?

35. Доказать, что фундаментальная группа пространства ΩX абелева.

36. Вычислить род Шварца 4-листного накрытия $T^2 \to T^2$, заданного как произведение двух двулистных накрытий $S^1 \to S^1$.

37. На сфере S^2 заданы две нечетные функции. Доказать, что они обе принимают значение 0 в некоторой точке.

38. Пусть дано отображение $S^n \to S^n$, переводящее противоположные точки в противоположные. Доказать, что это отображение на.

II СЕМЕСТР

1. Гомологии окружности с коэффициентами в локальной системе со слоем Z^2, в которой обнос вдоль базы действует как перестановка образующих.

2. Гомологии RP^n с коэффициентами в локальной системе со слоем Z, на котором образующая группы $\pi_1(RP^n)$ действует как умножение на -1.

3. Найти $H_*(X, Z)$, если
$H_*(X, Z_2) = Z_2, 0, Z_2, Z_2, Z_2, 0, 0, 0, \ldots,$
$H_*(X, Z_3) = Z_3, 0, Z_3, 0, Z_3, 0, 0, 0, \ldots.$

4. Вычислить мультипликативную структуру кольца $H^*(G_2(R^4), Z_2)$ в базисе, порожденном клетками Шуберта.

5. При каких n существует нетривиальное расслоение над S^1 со слоем S^n? Над S^2 со слоем S^n?

6. Для любого ли расслоения над S^4 со слоем T^3 (соответственно, со слоем S^2) существует сечение?

7. Когомологии пространства $\Omega(S^2 \vee S^4)$.

8. Кольцо $H^*(O(n), Z_2)$.

9. Когомологии пространства $\Omega(RP^n)$.

10. Доказать, что существует вещественное векторное 4-мерное расслоение, не разложимое в прямую сумму.

11. Существует ли нетривиальное векторное расслоение, все классы Эйлера и Штифеля–Уитни которого тривиальны?

12. Существует ли вложение RP^4 в R^7?

13. Существует ли иммерсия RP^4 в R^6?

14. Существует ли диффеоморфизм RP^4 на себя без неподвижных точек, гомотопный тождественному? То же для S^4.

15. Существуют ли две вложенных непересекающихся окружности в R^3 такие что их индекс зацепления равен 0, но расцепить их нельзя?

17. Тот же вопрос для двух вложенных 2-сфер в R^5.