Список задач по курсу В. Васильева
"Топология. Доп. главы" 2 семестр

1. Выбросим из $\mathbf{R}^n$ все подпространства коразмерности 2, заданные условиями $x_i = x_j = x_k$, $i < j < k$. Доказать, что останется пространство типа $K(\pi, 1)$.

2. Доказать, что любое комплексное алгебраическое многообразие (скажем, подмногообразие в $\mathbf{CP}^n$) можно разбить в конечное объединение непересекающихся гладких подмногообразий разных размерностей, каждое из которых есть $K(\pi, 1)$.

3. Является ли тавтологическое расслоение над $G_2(\mathbf{R}^4)$ суммой двух одномерных? Тот же вопрос для $G_2^+(\mathbf{R}^4)$.

4. Эквивалентно ли тавтологическое расслоение над $G_4(\mathbf{R}^\infty)$ сумме двух двумерных? Тот же вопрос для $G_4^+(\mathbf{R}^\infty)$. Те же вопросы про стабильную эквивалентность расслоений.

5. Существует ли на $\mathbf{RP}^4$ поле двумерных касательных плоскостей?

6. Доказать, что если $n + 1 = 2^r m$, m нечетно, то на $\mathbf{RP}^n$ не существует 2^r всюду линейно независимых векторных полей.

7. Существует ли иммерсия $\mathbf{RP}^{17} \to \mathbf{R}^{30}$?

8. Существует ли иммерсия $\mathbf{RP}^2 \to \mathbf{R}^3$ без 3-кратных точек?

9. Вычислить рациональные когомологии пространств $K(\pi, n)$, где π — конечная группа.

10. Векторное подпространство пространства вещественных гладких функций на многообразии M называется k_r-интерполирующим, если для любых k точек в M и любой гладкой функции $f : M \to \mathbf{R}$ найдется функция этого подпространства, у которой r-струи во всех этих точках совпадают со струями функции f.

    Существует ли 4_1-интерполирующее 16-мерное пространство функций на $\mathbf{R}^2$?

11. Рассмотрим граф K="3 дома и 3 колодца", т.е. граф с 6=3+3 вершинами и 9 ребрами, соединяющими каждую вершину из первой тройки с каждой вершиной второй тройки. Найти в группе когомологий конфигурационного пространства $B(K, 2)$ препятствие к вложению этого графа в $\mathbf{R}^2$.

12. Рассмотрим полный граф с 5 вершинами, т.е. граф с 10 ребрами, соединяющими каждую вершину с каждой. Найти в группе когомологий конфигурационного пространства $B(K, 2)$ препятствие к вложению этого графа в $\mathbf{R}^2$.

13. Существует ли непрерывное отображение $\mathbf{RP}^8 \to \mathbf{R}^{10}$ без 3-кратных точек?

14. Посчитать род накрытия $S^n \to \mathbf{RP}^n$

15. Посчитать род двулистного накрытия $G_2^+(\mathbf{R}^4) \to G_2(\mathbf{R}^4)$

16. Доказать, что род 24-листного очевидного накрытия, отображающего конфигурационное пространство упорядоченных наборов 4 точек на плоскости в аналогичное пространство неупорядоченных наборов, не меньше 3.

17. Доказать, что род $d!$-листного очевидного накрытия, отображающего конфигурационное пространство упорядоченных наборов d точек на плоскости в аналогичное пространство неупорядоченных наборов, всегда не превосходит $d-1$.

18. Рассмотрим конфигурационное пространство неупорядоченных наборов из 3 точек в $\mathbf{R}^2$ и 3-листное накрытие над ним, точки которого — это 3-конфигурации, в которых одна из трех точек отмечена. Рассмотрим его 2-е присоединенное расслоение, слой которого — это джойн двух экземпляров слоя этого накрытия над той же точкой базы. Задача: посчитать первое гомологическое препятствие к существованию непрерывного сечения у этого расслоения. Тривиально ли это препятствие ?

19. Перечислить все когомологические операции типа $(\mathbf{Q}, n, \mathbf{Q}, n+2)$ для всех n. Можно ли из них построить стабильную операцию?

20. Доказать, что

$$Sq^k(w_m) = w_k w_m + \binom{k-m}{1} w_{k-1} w_{m+1} + \cdots + \binom{k-m}{k} w_0 w_{m+k}.$$

21. Доказать эквивалентность двух определений инварианта Хопфа отображения $\phi : S^{2n-1} \to S^n$: с помощью индекса зацепления и умножения в когомологиях $S^n \cup_\phi D^{2n}$.