В. А. Васильев

Топология

Специальный курс, осенний семестр 1997 г.

1 Лекция 1

1.1 Гомологии фильтрованных пространств

В этом курсе, как правило, под гомологиями будут подразумеваться сингулярные гомологии топологического пространства X.

Определение. Топологическое пространство X называют *фильтрованным,* если задана возрастающая последовательность его подпространств

$$\emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X$$

так, что $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$. Член $X_{-1} = \emptyset$ добавлен формально, для единообразия последующих обозначений.

Фильтрацию называют *конечной,* если $X_n = X$ для некоторого конечного n. Сначала мы будем предполагать, что фильтрация конечна. После того как мы разберемся со случаем конечной фильтрации, легко будет перенести многие из полученных результатов на случай бесконечной фильтрации.

Спектральная последовательность — это метод вычисления гомологий с помощью фильтрации.

Пример. Двучленная фильтрация $X_0 \subset X_1 = X$.

В этом случае есть метод вычисления гомологий пространства X — точная гомологическая последовательность пары:

$$\longrightarrow H_{i+1}(X, X_0) \xrightarrow{\partial} H_i(X_0) \longrightarrow H_i(X) \longrightarrow H_i(X, X_0) \xrightarrow{\partial} H_{i-1}(X_0) \longrightarrow \cdots$$

Если есть информация об операторах ∂ и группах $H_i(X_0)$ и $H_i(X, X_0)$ для всех i, то можно достаточно много узнать о гомологиях $H_i(X)$. А именно:

1) в $H_i(X)$ есть подгруппа h, изоморфная факторгруппе

$$H_i(X_0)/\partial H_{i+1}(X, X_0);$$

2) факторгруппа $H_i(X)/h$ изоморфна ядру отображения

$$\partial : H_i(X, X_0) \to H_{i-1}(X_0).$$

Этой информации, правда, не достаточно для того, чтобы полностью восстановить группу $H_i(X)$. Например, если $h \approx \mathbf{Z}$ и $H_i/h \approx \mathbf{Z}_2$, то возможны варианты $H_i \approx \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_2$ и $H_i \approx \mathbf{Z}$.

Но этой информации достаточно, например, для вычисления рангов групп гомологий. А если нас интересуют группы гомологий с коэффициентами в поле, то информация полная.

Аналогичная ситуация возникает когда фильтрация n-членная. Для ее формального описания нам потребуются некоторые определения.

Определение. *Фильтрацией* на абелевой группе G называют такую последовательность подгрупп

$$G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G,$$

что $\bigcup_{i=0}^{\infty} G_i = G$.

Для групп мы тоже пока ограничимся конечными фильтрациями.

Определение. *Градуировкой* абелевой группы g называют ее разложение в прямую сумму

$$g = g_0 \oplus g_1 \oplus \cdots \oplus g_n.$$

В этом случае группа g называется *градуированной.* Элементы группы g_i называют при этом однородными элементами степени (или градуировки) i.

(На самом деле бывают градуировки с любым множеством индексов; мы будем использовать только описанные выше $\mathbf{Z}_+$-градуировки, то есть градуировки, в которых множество индексов – это полугруппа $\mathbf{Z}_+$.)

Любой фильтрованной группе G соответствует градуированная группа

$$G_0 \oplus (G_1/G_0) \oplus (G_2/G_1) \oplus \cdots \oplus (G_n/G_{n-1}).$$

Эту градуированную группу называют градуированной группой, *присоединенной* к фильтрованной группе.

Количества свободных образующих у фильтрованной группы и у присоединенной к ней градуированной группы совпадают. Более того, если G – векторное пространство над полем, фильтрованное последовательностью своих подпространств, то эти две группы изоморфны.

Если есть фильтрованное топологическое пространство, то на группе его гомологий возникает следующая фильтрация: группа $H_i^{(p)}(X) \subset H_i(X)$ состоит из всех циклов, реализуемых циклами, лежащими в $C_i(X_p)$. Иными словами,

$$H_i^{(p)}(X) = \operatorname{Im}(H_i(X_p) \to H_i(X)).$$

Ясно, что определенная таким образом фильтрация будет возрастающей:

$$H_i^{(0)}(X) \subset H_i^{(1)}(X) \subset \cdots \subset H_i(X).$$

Спектральная последовательность — это способ вычислять градуированную группу, присоединенную к этой фильтрации.

Возвращаясь к примеру двучленной фильтрации, отметим, что в некотором смысле имеет место неравенство

$$H_i(X) \leq H_i(X_0) \oplus H_i(X, X_0).$$

Если пространство X_0 выбрано разумно, то обе группы $H_i(X_0)$ и $H_i(X, X_0)$ небольшие, поэтому вычисления упрощаются.

Первый шаг при вычислении спектральной последовательности заключается в том, чтобы выписать группы $H_i(X_p, X_{p-1})$. Если таблица, состоящая из таких групп для всех i и p, обозрима, т.е. в ней много нулевых членов а ненулевые легко описываются, то дальше вычислять будет просто. Спектральная последовательность — это не только алгоритм этих вычислений, но и удобный способ записи этой таблицы.

А именно, эта таблица рисуется на плоскости с координатами p и q, см. рис. 1, 2 ниже, причем в клетку с координатами p, q записывают группу $H_{p+q}(X_p, X_{p-1})$. Эта группа обозначается через $E^1_{p,q}$. Затем над этой таблицей $E^1 \equiv \{E^1_{p,q}\}$ производят некоторые преобразования, в ходе которых она последовательно заменяется на аналогичные таблицы $E^r \equiv \{E^r_{p,q}\}$, $r = 2, 3, \ldots, \infty$, и предельный член E^∞ спектральной последовательности имеет вид

$$E^\infty_{p,q} = H^{(p)}_{p+q}(X)/H^{(p-1)}_{p+q}(X).$$

Таким образом, группа $\bigoplus_{p+q=c} E^\infty_{p,q}$ — это точности градуированная группа, присоединенная к группе $H_c(X)$, профильтрованной своими подгруппами $H^{(p)}_c(X)$.

1.2 Определение спектральной последовательности фильтрованного пространства

Определим еще один фильтрованный объект — фильтрованный цепной комплекс. Сначала рассмотрим обычный цепной комплекс:

$$\cdots \longrightarrow C_i \xrightarrow{\partial} C_{i-1} \xrightarrow{\partial} C_{i-2} \longrightarrow \cdots,$$

где $\partial\partial = 0$. Предположим, что все группы C_i фильтрованные, то есть для любого i имеется фильтрация

$$C_{i,0} \subset C_{i,1} \subset \ldots \subset C_i.$$

Этот набор фильтраций *согласован со структурой комплекса*, если

$$\partial(C_{i,p}) \subset C_{i-1,p}$$

для всех i, p. В таком случае комплекс называют фильтрованным.

Пример фильтрованного комплекса дается комплексом цепей фильтрованного пространства. А именно, для топологического пространства X с фильтрацией подпространствами X_p группа $C_{i,p}$ определяется как группа i-мерных цепей пространства X_p.

С фильтрованной группой мы связывали присоединенную градуированную группу. Для фильтрованного комплекса рассмотрим набор градуированных групп, присоединенных ко всем его компонентам C_i. Однородные элементы этих градуированных групп обозначаются так:

$$E^0_{p,i-p} = C_{i,p}/C_{i,p-1},$$

так что $\bigoplus_{p+q=i} E^0_{p,q}$ — это градуированная группа, присоединенная к фильтрованной группе C_i.

В частности, если цепной комплекс — это комплекс сингулярных цепей фильтрованного пространства X, то

$$E^0_{p,i-p} = C_i(X_p)/C_i(X_{p-1}),$$

или, полагая $i - p = q$,

$$E^0_{p,q} = C_{p+q}(X_p)/C_{p+q}(X_{p-1}). \tag{1}$$

Для того, чтобы перейти от цепей к гомологиям, нужно понять, какие элементы фильтрованного комплекса соответствуют циклам, а какие границам. Мы берем элементы группы (1), то есть смежные классы, в которых есть представители — циклы, а затем рассматриваем факторгруппу по смежным классам, содержащим границы. В итоге получаем p-й член градуированной группы, присоединенной к фильтрованной группе H_{p+q}, то есть факторгруппу $H^{(p)}_{p+q}(X)/H^{(p-1)}_{p+q}(X)$. Программа для последовательного выяснения всего этого и есть спектральная последовательность.

Дадим точные определения. В $E^0_{p,q}$ есть две последовательности подгрупп, а именно:

$$Z^r_{p,q} = \{\alpha | \exists a \in \alpha; \partial a \subset X_{p-r}\}$$

(здесь a — представитель смежного класса α),

$$B^r_{p,q} = \{\alpha | \exists b \in X_{p+r-1}, \partial b \in \alpha\}.$$

Ясно, что $B^r_{p,q} \subset Z^r_{p,q}$ для всех r. Кроме того,

$$Z^r_{p,q} \supset Z^{r+1}_{p,q} \quad \text{— группы уменьшаются}$$

и

$$B^r_{p,q} \subset B^{r+1}_{p,q} \quad \text{— группы увеличиваются.}$$

Положим $Z^r_{p,q}/B^r_{p,q} = E^r_{p,q}$.

Если наша фильтрация пространства X конечна, то в некоторый момент ситуация стабилизируется и соответствующие стабильные группы $E^\infty_{p,p} \equiv \lim_{r\to\infty} E^r_{p,q}$ удовлетворяет соотношению

$$E^\infty_{p,q} = H^{(p)}_{p+q}(X)/H^{(p-1)}_{p+q}(X).$$

Таким образом, диагональ $\{(p,q)|p + q = i\}$ таблицы $\{E^\infty_{p,q}\}$ относится к $(p + q)$-мерным гомологиям.

Первые члены спектральной последовательности имеют довольно простой смысл. Прежде всего нужно проверить, что два определения групп $E^0_{p,q}$ совпадают, т.е.

$$C_{p+q}(X_p)/C_{p+q}(X_{p-1}) = E^0_{p,q} = Z^0_{p,q}/B^0_{p,q}.$$

Действительно, $Z^0_{p,q}$ состоит из всех $(p+q)$-мерных относительных цепей X_p по модулю X_{p-1}, а $B^0_{p,q} = \emptyset$.

Легко проверить, что

$$E^1_{p,q} = Z^1_{p,q}/B^1_{p,q} = H_{p+q}(X_p, X_{p-1}).$$

Действительно, $Z^1_{p,q}$ состоит из классов смежности, в каждом из которых есть такой представитель a, что $\partial a \in X_{p-1}$ (а следовательно и все представители этого смежного класса удовлетворяют этому условию), а $B^1_{p,q}$ состоит из классов смежности, в каждом из которых есть представитель вида ∂b, где $b \in X_p$.

На спектральной последовательности $\{E^r_{p,q}\}$ есть еще одна дополнительная структура — ее дифференциалы

$$\partial^r : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}.$$

Эта операция определяется следующим образом. Пусть цепь $a \in C_{p+q}(X_p)$ такова, что $\partial a \in C_{p+q-1}(X_{p-r})$, так что содержащий ее смежный класс $\tilde{\alpha} \in E^0_{p,q}$ принадлежит подгруппе $Z^r_{p,q} \subset E^0_{p,q}$ и определяет (после приведения по модулю подгруппы $B^r_{p,q}$) некоторый элемент $\alpha \in E^r_{p,q}$. Берем границу ∂a этой цепи. Это будет цикл, лежащий в X_{p-r}. Берем содержащий его смежный класс в группе $E^0_{p-r,q+r-1} \equiv C_{p+q-1}(X_{p-r})/C_{p+q-1}(X_{p-r-1})$. Конечно, он принадлежит подгруппе $Z^m_{p-r,q+r-1}$ для любого $m = 0, 1, \ldots, \infty$, в частности для $m = r$. Берем его смежный класс по модулю подгруппы $B^r_{p-r,q+r-1}$, то есть элемент группы $E^r_{p-r,q+r-1}$. Несложно проверить, что результат не зависит от выбора представителя a в смежном классе α. Это и есть $\partial^r \alpha$. Например, оператор ∂^0 действует на одну клеточку вертикально вниз, оператор ∂^1 — на одну клеточку налево, ∂^2 — "ходом коня" на две клетки влево и на одну вверх, и т.д. Все эти операторы ∂^r действуют в соседнюю диагональ (на 1 понижают тотальную размерность $p+q$).

Операция ∂^r превращает член E^r в цепной комплекс:

$$\cdots \to E^r_{p+r,q-r+1} \xrightarrow{\partial^r} E^r_{p,q} \xrightarrow{\partial^r} E^r_{p-r,q+r-1} \to \cdots$$

Действительно, легко проверить, что $\partial^r \partial^r = 0$ (граница от границы равна нулю).

Оператор ∂^0 — это граничный гомоморфизм комплекса относительных цепей $C_*(X_p)/C_*(X_{p-1})$, гомологии которого — это относительные группы гомологий $H_i(X_p, X_{p-1})$, то есть группы $E^1_{p,i-p}$. Вообще, раскрытием определений доказывается следующая фундаментальная формула, принадлежащая Ж. Лере (как впрочем и само понятие спектральной последовательности).

$$E^{r+1}_{p,q} = \frac{\operatorname{Ker} \partial^r (E^r_{p,q})}{\operatorname{Im} \partial^r (E^r_{p+r,q-r+1})}. \qquad (2)$$

То есть следующий член E^{r+1} спектральной последовательности состоит из групп гомологий комплексов, группы C_i которого — это клетки $E^r_{p,q}$ предыдущего, а граничный оператор — это только что определенный оператор ∂^r.

Пример. Еще раз рассмотрим случай двучленной фильтрации $X_0 \subset X$ и убедимся, что соответствующая спектральная последовательность эквивалентна точной последовательности пары (X, X_0).

Член E^1 спектральной последовательности изображен на рис. 1. За i-мерные гомологии отвечает диагональ, на которой могут быть ненулевыми лишь две клетки $E^1_{0,i} \equiv H_i(X_0)$ и $E^1_{1,i-1} \equiv H_i(X, X_0)$ этого члена. В этом случае $E^\infty = E^2$.

$$
\begin{array}{r|cc|c}
q & & & \\
 & \dots & \dots & \\
q=i+1 & H_{i+1}(X_0) & H_{i+2}(X,X_0) & 0 \\
q=i & H_i(X_0) & H_{i+1}(X,X_0) & 0 \\
q=i-1 & H_{i-1}(X_0) & H_i(X,X_0) & 0 \\
 & \dots & \dots & \\
\hline
 & p=0 & p=1 & p\geq 2 \quad p
\end{array}
$$

Рис. 1: С. п. для двучленной фильтрации

Дифференциал ∂^1, действующий на этом члене, — это просто всевозможные граничные операторы из точной последовательности пары:

$$
\begin{array}{ccc}
H_i(X_0) & \xleftarrow{\partial^1} & H_{i+1}(X_1,X_0) \\
H_{i-1}(X_0) & \xleftarrow{\partial^1} & H_i(X_1,X_0)
\end{array}
$$

После действия этого дифференциала получаем в точности то, что имели в точной последовательности пары. А именно, для любого i на диагонали $(p+q=i)$ получаем пару групп, присоединенную к фильтрованной группе $H_i(X)$ — ее подгруппу $E^2_{0,i}$, изоморфную факторгруппе $H_i(X_0)/\partial^1 H_{i+1}(X,X_0)$ и факторгруппу $E^2_{1,i-1} \equiv H_i(X)/E^2_{0,i}$, равную ядру дифференциала $\partial^1 : H_i(X,X_0) \to H_{i-1}(X_0)$.

После этого спектральная последовательность стабилизируется: $E^2 \equiv E^3 \equiv \dots \equiv E^\infty$. (В таких случаях говорят еще, что спектральная последовательность *вырождается* в члене E^2: все последующие дифференциалы ∂^r, $r \geq 3$, тривиальны.) Действительно, любой дифференциал ∂^r, $r \geq 3$, действует либо из нулевой группы, либо в нулевую.

Пример. Трехчленная фильтрация $X_0 \subset X_1 \subset X_2 = X$.

Член E^1 спектральной последовательности, связанной с трехчленной фильтрацией, выглядит как показано на рис. 2

Здесь все горизонтальные стрелки — это дифференциалы ∂^1. Как и в общем случае, такой дифференциал, действующий из клетки $E^1_{p+1,q}$ в $E^1_{p,q}$ — это просто граничный оператор из точной последовательности тройки (X_p, X_{p-1}, X_{p-2}):

$$
H_{i+1}(X_p, X_{p-1}) \xrightarrow{i} H_{i+1}(X_{p+1}, X_{p-1}) \xrightarrow{j} H_{i+1}(X_{p+1}, X_p) \xrightarrow{\partial} H_i(X_p, X_{p-1}). \qquad (3)
$$

где $i = p+q$.

Например, стрелочка, соединяющая на рис. 2 клеточки $(p,q) = (2, i-1)$ и $(1, i-1)$, — это оператор ∂ из фрагмента $H_{i+1}(X_2, X_1) \xrightarrow{\partial} H_i(X_1, X_0)$.

$$
\begin{array}{c|ccccc|cc}
q & & & & & & & \\
 & \dots & & \dots & & \dots & & \\
q=i+1 & H_{i+1}(X_0) & \leftarrow & H_{i+2}(X_1,X_0) & \leftarrow & H_{i+3}(X_2,X_1) & 0 & \\
q=i & H_{i}(X_0) & \leftarrow & H_{i+1}(X_1,X_0) & \leftarrow & H_{i+2}(X_2,X_1) & 0 & \\
q=i-1 & H_{i-1}(X_0) & \leftarrow & H_{i}(X_1,X_0) & \leftarrow & H_{i+1}(X_2,X_1) & 0 & \\
 & \dots & & \dots & & \dots & & \\
\hline
 & p=0 & & p=1 & & p=2 & p\geq 3 & p
\end{array}
$$

Рис. 2: С. п. для трехчленной фильтрации

(Конечно, при $p = 0$ этот оператор проще описать как дифференциал из точной последовательности пары (X_1, X_0), но вспомним, что мы предусмотрительно ввели (-1)-й член фильтрации, $X_{-1} = \emptyset \dots$)

2 Лекция 2

После действия этого дифференциала получаем член E^2. Его группы $E^2_{p,q}$ получены из аналогичных групп $E^1_{p,q}$ следующим образом.

1) в "нулевом" столбце факторизуем группы $H_q(X_0)$ по образу дифференциала ∂^1;

2) в столбце $p = 2$ берем ядро дифференциала ∂^1, действующего из $H_{q+2}(X_2, X_1)$, в $H_{q+1}(X_1, X_0)$, то есть только такие элементы этой группы, границы которых в X_1 гомологичны циклам, лежащим в X_0.

3) в столбце $p = 1$ берем ядро отображения ∂^1, то есть такие элементы групп $H_*(X_1, X_0)$, граница которых гомологична нулю в X_0, и дополнительно факторизуем по границам относительных циклов $X_2 \mathrm{mod} X_1$.

Средний столбец стабилизируется в полученном после этого члене E^2, в дальнейшем он уже не изменяется. Но остается еще (вообще говоря) нетривиальное действие из групп $E^2_{2,i-1}$ в $E^2_{0,i}$, то есть из элементов групп $H_{i+1}(X_2, X_1)$, лежащих в ядре первого дифференциала, в факторгруппу $H_i(X_0)$ по образу дифференциала. Это действие устроено следующим образом. Берем элемент в $H_{i+1}(X_2, X_1)$, принадлежащий ядру ∂^1. В силу точности последовательности (3) в члене $H_{i+1}(X_{p+1}, X_p)$ с $p = 1$, он лежит в образе предыдущего отображения, т.е. у него есть прообраз в $H_{i+1}(X_2, X_0)$. Возьмем такой прообраз α и отобразим его в $H_i(X_0)$ посредством граничного оператора

$$\partial : H_{i+1}(X_2, X_0) \to H_i(X_0) \tag{4}$$

из точной последовательности пары. В результате получим требуемый элемент.

Возникает вопрос: почему это определение корректно? Чтобы проверить корректность операции, рассмотрим два разных прообраза α и $\alpha' \in H_{i+1}(X_2, X_0)$ Они отличаются на элемент ядра отображения j (см. (3)), т.е. на элемент образа группы $H_{i+1}(X_1, X_0)$ при отображении i. Соответственно и их граничные элементы в группе $H_i(X_0)$ при отображении (4) отличаются на границу некоторого элемента группы $H_{i+1}(X_1, X_0)$. Но вспомним, что группа $E^2_{0,1}$ определялась в точности как фактор группы $H_i(X_0)$ по множеству таких границ. Поэтому операция ∂^2 определена корректно.

Пример. Фильтрация клеточного пространства остовами $X_i = sk^i(X)$.

В этом случае

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) = \tilde{H}_{p+q}(X_p/X_{p-1}) = \tilde{H}_{p+q}(\bigvee S^p).$$

(Напомним, что $\tilde{H}$ означает гомологии, приведенные по модулю точки.) В последней формуле $\bigvee S^p$ — это букет сфер, соответствующих всем p-мерным клеткам комплекса X. Эти группы гомологий будут нетривиальны лишь при $q = 0$. Это означает, что член E^1 состоит лишь из одной ненулевой строки $q = 0$. При этом его дифференциалы ∂^1 — это обычные дифференциалы из точной последовательности тройки. Они определяются с помощью коэффициентов инцидентности, см. конспекты 2-го семестра.

После этого спектральная последовательность вырождается:

$$E^2 = E^3 = \ldots = E^\infty.$$

Гомоморфизм спектральных последовательностей

Гомоморфизмом спектральных последовательностей называется набор гомоморфизмов $\check{E}^r_{p,q} \to E^r_{p,q}$, определенных для всех p, q и r, которые коммутируют со всеми дифференциалами ∂^r.

Это абстрактное определение соответствует следующей простой геометрической ситуации. Пусть заданы два фильтрованных пространства

$$\check{X}_0 \subset \check{X}_1 \subset \ldots \subset \check{X}$$

$$X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X$$

и отображение $\check{X} \to X$, *уважающее фильтрацию,* т.е. $\check{X}_p \mapsto X_p$. Тогда такое отображение индуцирует гомоморфизм спектральных последовательностей.

Одно из главных применений гомоморфизма спектральных последовательностей основано на следующем утверждении, которое достаточно очевидно.

Теорема 1 *Пусть $\check{E}^r_{p,q} \to E^r_{p,q}$ — гомоморфизмом спектральных последовательностей. Пусть, далее, для некоторого r этот гомоморфизм является изоморфизмом во всех клетках (p,q). Тогда он будет изоморфизмом и для всех $r' \geq r$, а группы гомологий, к которым сходятся эти спектральные последовательности, изоморфны (если есть сходимость).*

Так доказываются многие теоремы о совпадении различных теорий гомологий (например, сингулярных и клеточных, сингулярных когомологий с вещественными коэффициентами и когомологий де Рама), даже если сами гомологии вычислить при этом не удается.

Спектральная последовательность расслоения

Пусть $\pi : X \xrightarrow{F} B$ — локально тривиальное расслоение, причем база B — клеточное пространство. Можно попробовать посчитать гомологии X с помощью фильтрации, индуцированной фильтрацией $B_i = sk^i(B)$, т.е. с помощью фильтрации $X_i = \pi^{-1}(B_i)$.

Несложно убедиться, что

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(X_p/X_{p-1}) \cong (H_q(F))^{\text{число } p\text{-мерных клеток базы}}.$$

В самом деле, $B_p \setminus B_{p-1}$ состоит из набора p-мерных дисков. Над каждым из них расслоение тривиально, то есть эквивалентно $F \times \dot{D}^p$, где $\dot{D}^p$ – открытый p-мерный шар. После приведения по модулю X_{p-1} каждый из дисков даст вклад в группу $H_*(X_p, X_{p-1})$, изоморфный

$$H_*(F \times D^p, F \times S^{p-1}) = H_{*-p}(F).$$

Поэтому группа $H_*(X_p, X_{p-1})$, изоморфна прямой сумме групп $H_{*-p}(F)$ по всем p-мерным клеткам. Ее естественно рассматривать как группу $C_p(B, H_q(F))$, то есть группу клеточных цепей CW-комплекса B с коэффициентами в $H_q(F)$: любой p-мерной клетке ставится в соответствие элемент группы $H_{*-p}(F)$. Более строго, изоморфизм

$$\lambda : C_p(B, H_q(F)) \to H_{p+q}(X_p/X_{p-1}) = E^1_{p,q} \tag{5}$$

реализуется следующим образом. Возьмем p-мерную клетку базы. Для нее есть характеристическое отображение

$$\varphi : (D^p, \partial D^p) \to (B_p, B_{p-1}),$$

определяющее гомеоморфизм $D^p \setminus \partial D^p$ на эту клетку. Над шаром рассматриваем индуцированное расслоение $\tilde{X} \to D^p$, где

$$\tilde{X} = \{(x, y) \in (D^p \times X) |\, \varphi(x) = \pi(y)\},$$

а проекция $\tilde{X} \to D^p$ задается забыванием элемента y пары (x, y). Это расслоение изоморфно тривиальному расслоению $D^p \times F$ и пространство $\tilde{X}$ гомеоморфно $D^p \times F$. Фиксируем такой гомеоморфизм. Если задан q-мерный цикл α в F, то возникает $(q + p)$-мерная цепь $D^p \times \alpha$ в $D^p \times F$. (При помощи конструкции клеточных цепей прямое произведение цепей можно рассматривать как цепь в прямом произведении.) При этом

$$\partial(D^p \times \alpha) \subset S^{p-1} \times F$$

(мы учли, что $\partial\alpha = 0$), то есть эта цепь является относительным циклом пары $(D^p \times F, S^{p-1} \times F)$. Сопоставим каждой точке $(x, y) \in \tilde{X}$ точку $y \in X$. При этом цепь $D^p \times \alpha$ перейдет в цепь в пространстве X_p, причем его граница $\partial(D^p \times \alpha)$ перейдет в цикл, лежащий в пространстве X_{p-1}. Таким образом, мы получаем относительный класс гомологий X_p по модулю X_{p-1}. Делая то же самое для каждой p-мерной клетки в B, мы всякому элементу группы $C_p(B, H_q(F))$ сопоставим элемент из $H_{p+q}(X_p/X_{p-1})$. Это задает требуемый изоморфизм (5).

Займемся вычислением члена E^2. Для этого нужно рассмотреть дифференциал ∂^1, действующий на группы $E^1_{p,q}$ в направлении $\longleftarrow$, то есть переводящий некоторую группу, изоморфную $C_p(B, H_q(F))$, в группу, изоморфную $C_{p-1}(B, H_q(F))$.

Хочется "угадать ответ:" $E^2_{p,q} = H_p(B, H_q(F))$, но это, вообще говоря, будет неверно. Проблема в том, что построенный выше изоморфизм (5) не канонический. Для его построения мы фиксировали некоторые гомеоморфизмы между стандартным слоем F нашего расслоения и слоями над центральными точками x_k p-мерных клеток. Если для некоторой клетки мы заменим такой гомеоморфизм $f : F \to \pi^{-1}(x_k)$ на аналогичный гомеоморфизм f', то в (5) оператор λ^{-1} изменится следующим образом: на слагаемое $H_q(F)$ в левой части (5), соответствующее этой клетке, нужно подействовать изоморфизмом $((f')^{-1} \circ f)_* : H_q(F) \to H_q(F)$.

Для того, чтобы правильно определить дифференциалы ∂^2, нужно отождествить гомологии слоев над центральными точками клеток размерности p и лежащих в их границе клеток размерности $p-1$. Такие отождествление можно произвести, соединив точки путями, лежащими почти полностью в бо́льшей клетке (размерности p) и лишь в последний момент приходящими в точку меньшей клетки. Любой такой путь $l : [0,1] \to B$ задает изоморфизм между гомологиями слоев над его начальной и конечной точкой. Формальное определение этого изоморфизма таково. Рассмотрим расслоение $X' \to [0,1]$, индуцированное этим путем l из исходного расслоения, и зафиксируем произвольную тривиализацию этого расслоения над $[0,1]$. Эта тривиализация задает отождествление между группами гомологий всех слоев расслоения, в частности слоев над начальной и конечной точками. Легко видеть, что это отождествление не зависит от выбора тривиализации индуцированного расслоения. С другой стороны, в силу определения индуцированного расслоения слои над концевыми точками отрезка отождествляются со слоями исходного расслоения над точками $l(0)$ и $l(1)$. Поэтому мы получили изоморфизм $H_*(\pi^{-1}(l(0))) \simeq H_*(\pi^{-1}(l(1)))$. Он зависит только от гомотопического класса пути l в классе путей с фиксированными концами.

В частности, если начало и конец нашего пути совпадают, $l(0) = l(1)$, то он задает автоморфизм группы $H_*(\pi^{-1}(l(0)))$ в себя, зависящий только от класса этого пути в фундаментальной группе базы; тем самым задается гомоморфизм $\pi_1(B) \to \mathrm{Aut} H_*(F)$, который называется *представлением монодромии* для нашего расслоения.

Однако если меньшая клетка несколько раз входит в границу большей (такова например ситуация со стандартным клеточным разбиением проективного пространства), то каждому такому вхождению соответствует свой путь в большей клетке, соединяющий их центры, а следовательно свое (вообще говоря не одно и то же) отождествление групп гомологий слоев над ними.

Напомним, что при вычислении клеточных когомологий клеточного пространства B, скажем с коэффициентами в $\mathbf{Z}$, граничный оператор $C_p \to C_{p-1}$ в комплексе клеточных цепей определялся в терминах коэффициентов инцидентности: граница p-мерной клетки a_i^p равна $\sum_k [a_i^p : a_k^{p-1}] a_k^{p-1}$, где индекс k нумерует все $(p-1)$-мерные клетки a_k^{p-1}, а $[a_i^p : a_k^{p-1}]$ — это и есть коэффициент инцидентности ориентированных клеток a_i^p и a_k^{p-1}, равный алгебраическому числу вхождений клетки a_k^{p-1} в границу a_i^p. Его можно определять при помощи понятия степени отображения. Именно, при разумном выборе характеристического отображения $\chi_i^p : D^p \to B$ для клетки a_i^p и "центральных" точек в клетках a_k^{p-1}, любая такая центральная точка обладает окрестностью $\alpha_k \in a_k^{p-1}$ такой что $(\chi_i^p)^{-1}(\alpha_k)$ является несвязным объединением нескольких $(p-1)$-мерных шаров в $S^{p-1} = \partial D^p$ и ограничение χ_i^p на каждый из них — гомеоморфизм на α_k. Для любой из таких компонент τ_j в S^{p-1} определим ее индекс, равный 1 или -1 в зависимости от того, совпадает или нет собственная ориентация α_k (индуцированная из фиксированной ориентации клетки a_k^{p-1}) с ориентацией, индуцированной отображением χ_k^p из стандартной ориентации S^{p-1}. Коэффициент $[a_i^p : a_k^{p-1}]$ равен сумме этих индексов по всем компонентам τ_j.

Теперь вернемся к случаю граничного оператора $\partial^1 : C_p(B, H_q(F)) \to C_{p-1}(B, H_q(F))$, участвующего в вычислении члена E^2 спектральной последовательности расслоения. Нам нужно для любой p-мерной клетки a_i и любого элемента γ группы $H_q(F)$ определить границу цепи, равной γ на этой клетке и нулю на всех остальных. Эта граница вновь равна сумме клеток a_k^{p-1}, взятых с некоторыми коэффициентами, принадлежащими группе $H_q(F)$. Такой коэффициент, соответствующий клетке a_k^{p-1}, вновь равен сумме нескольких элементов, соответствующих компонентам τ_j множества $(\chi_i^p)^{-1}(\alpha_k)$. Именно, любой такой компоненте соответствует некоторый изоморфизм $\theta_j : H_q(F) \to H_q(F)$. Он определяется как композиция

а) канонического изоморфизма $H_q(F) \to H_q(\pi^{-1}(x_i))$ (где x_i — центр клетки a_i^p), заданного гомеоморфизмом $F \to \pi^{-1}(x_i)$, участвующим в построении изоморфизма (5);

б) изоморфизма $H_q(\pi^{-1}(x_i)) \to H_q(\pi^{-1}(x_k))$ (где x_k — центр клетки a_k^{p-1}), заданного путем в a_i^p, являющимся образом пути в D^p, соединяющего центры клетки a_i^p и шарика α_j;

в) изоморфизма $H_q(\pi^{-1}(x_k)) \to H_q(F)$ заданного каноническим гомеоморфизмом $F \to \pi^{-1}(x_k)$, участвующим в построении изоморфизма (5) в размерности $p-1$.

Тогда граница нашего элемента $(a_i^p, \gamma) \in C_p(B, H_q(F))$ равна $\sum_k (a_k^{p-1}, \gamma_k)$, где вновь k пробегает индексы всех $(p-1)$-мерных клеток, а $\gamma_k \in H_q(F)$ — соответствующие коэффициенты инцидентности; они определяются как сумма по всем компонентам τ_j элементов $\pm\theta_j(\gamma)$, где знак $\pm$ определяется сравнением ориентаций точно так же, как в определении коэффициентов инцидентности со значениями в $\mathbf{Z}$.

Всех этих сложностей можно избежать, например, если база B односвязна. Действительно, зададимся вопросом: нельзя ли выбрать все канонические гомеоморфизмы $F \to \pi^{-1}(x_i)$ для всех центральных точек x_i всех клеток всех размерностей таким образом, чтобы все операторы θ_j были тождественными? Легко видеть, что это эквивалентно следующему условию: представление монодромии группы $\pi_1(B)$ тривиально (то есть отображает всю эту группу в единичный элемент группы $\mathrm{Aut} H_*(F)$). Конечно, это условие выполнено, если $\pi_1(B) = 0$, но имеется много примеров, когда $\pi_1(B) \neq 0$, а оно все же выполнено. Это свойство называется так: расслоение $X \to B$ *гомологически просто*.

Теорема 2 *Если расслоение $X \to B$ гомологически просто, (например, если его база односвязна) то для соответствующей спектральной последовательности $E^2_{p,q} \simeq H_p(B, H_q(F))$.*

Заметим, что в момент E^2 наша спектральная последовательность перестала зависеть от произвола в выборе клеточного разбиения базы. Ниже мы увидим, что это же верно и для произвольного (не гомологически простого) расслоения. На уровне, требующем некоторых уточнений, это объясняется так: мы могли прийти к тому же результату, рассматривая группу всех сингулярных цепей пространства расслоения и вводя на ней инвариантно определенную фильтрацию: ее p-й член состоит из всех цепей, проекция которых в базу не более чем p-мерна (что бы это ни значило).

Пример не гомологически простого расслоения — бутылка Клейна, рассматриваемая как расслоение над S^1 со слоем S^1, причем обход вдоль образующей в фундаментальной группе базы меняет ориентацию образующей группы $H_1(F) = \mathbf{Z}$.

3 Лекция 3

Пусть $\pi : X \xrightarrow{F} B$ — локально тривиальное расслоение со слоем F. Член E^1 спектральной последовательности этого расслоения задается формулой $E^1_{p,q} \cong C_p(B, H_q(F))$, см. (5) На предыдущей лекции мы говорили, что задача описания дифференциала

$$C_p(B, H_q(F)) \to C_{p-1}(B, H_q(F)), \tag{$*$}$$

вопреки ожиданиям, не так уж проста.

Хотелось бы написать, что $(*)$ — обычный граничный гомоморфизм цепного комплекса и, как следствие, $E^2_{p,q} = H_p(B, H_q(F))$. Но при построении изоморфизма (5) мы использовали то, что гомологии прообраза внутренней точки клетки отождествляются с гомологиями слоя F. Это отождествление зависит от выбора гомеоморфизма прообраза с абстрактным слоем F. Такие гомеоморфизмы нужно выбрать согласованным образом. Это означает следующее. В каждой клетке выбираем точку $*$ и фиксируем некоторый гомеоморфизм $\pi^{-1}(*) \sim F$. Если граница одной клетки содержит другую клетку, то имеется другой гомеоморфизм. А именно, мы соединяем точки этих клеток путем, целиком лежащим внутри большей клетки. Над ним расслоение тривиализуется, и это дает гомеоморфизм между слоями над концами пути. В результате получаем три гомеоморфизма:

$$\pi^{-1}(a) \sim F, \quad \pi^{-1}(b) \sim F, \quad \pi^{-1}(a) \sim \pi^{-1}(b).$$

Эти гомеоморфизмы индуцируют изоморфизмы групп гомологий. Условие согласованности означает, что изоморфизмы гомологий дают коммутативную диаграмму для любой большой (p-мерной) клетки и для любого вхождения меньших ($(p-1)$-мерных) клеток в ее границу.

Согласованный выбор гомеоморфизмов возможен тогда и только тогда, когда $\pi_1(B)$ тривиально действует на $H_*(F)$. Имеется в виду следующее действие. Рассмотрим замкнутый путь, представляющий некоторый элемент фундаментальной группы базы. Индуцированное расслоение над отрезком тривиализуется, поэтому мы получаем гомеоморфизм между слоем над началом отрезка и слоем над концом отрезка. Индуцированное этим гомеоморфизмом отображение в гомологиях от выбора тривиализации не зависит.

Расслоения, для которых $\pi_1(B)$ тривиально действует на $H_*(F)$, называют *гомологически простыми.* Если расслоение гомологически просто, то $E^2_{p,q} = H_p(B, H_q(F))$. Важно отметить, что в этом случае член $E^2_{p,q}$ уже не зависит от выбора клеточного разбиения.

Ясно, что если $\pi_1(B) = 0$, то расслоение обязательно гомологически просто. Но бывают и другие гомологически простые расслоения. Например, тривиальное расслоение $X = B \times F$ всегда гомологически просто и $E^2_{p,q} = H_p(B, H_q(F))$. На этом члене спектральная последовательность вырождается: $E^2 = \ldots = E^\infty$. Действительно, любой элемент группы $H_p(B, H_q(F))$ определяет настоящий цикл в $B \times F$. Следовательно, группы

$$H_m(B \times F) \quad \text{и} \quad \bigoplus_{p+q=m} H_p(B, H_q(F))$$

почти изоморфны, т.е. градуированная группа, присоединенная к фильтрованной группе $H_m(B \times F)$, изоморфна $\bigoplus_{p+q=m} H_p(B, H_q(F))$. Можно доказать, что в этом случае равенство не приближенное, а точное, т.е. изоморфизм между группами настоящий. Это — формула Кюннета.

Для гомологически простого расслоения формула Кюннета не всегда верна. Рассмотрим, например, расслоение Хопфа $S^3 \xrightarrow{S^1} S^2$. Для него член E^2 имеет вид

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & \mathbf{Z} & 0 & \mathbf{Z} \\ 0 & \mathbf{Z} & 0 & \mathbf{Z} \\ \hline & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Дифференциал $\partial^2 : E^2 \to E^2$ действует ходом коня. Что-то изменить может только гомоморфизм, действующий из правого нижнего угла в левый верхний угол. Но гомологии S^3 нам известны. Их вид показывает, что этот гомоморфизм должен всё убить, т.е. он отображает образующую группы $E^2_{2,0} \cong \mathbf{Z}$ в $\pm$ образующую группы $E^2_{0,1} \cong \mathbf{Z}$ (знак $\pm$ зависит от выбора ориентаций базы и слоя).

Действие дифференциала можно описать и непосредственно геометрически. "Клеточная" фильтрация базы состоит по существу из двух членов: $B_0 = B_1 = (\textit{точка})$, $B_2 = S^2$. Соответственно и фильтрация пространства $X = S^3$ состоит из членов $X_0 = X_1 \cong S^1$ и $X_2 = S^3$. При таком выборе фильтрации $E^2_{p,q} \equiv E^1_{p,q}$. По построению изоморфизма (5) (см. лекцию 2) образующая группы $E^1_{2,0} = E^2_{2,0}$ строится следующим образом. Рассмотрим характеристическое отображение $D^2 \to S^2$ единственной двумерной клетки, отображающее ∂D^2 в отмеченную точку B_0. Расслоение $\tilde{X} \to D^2$, индуцированное этим характеристическим отображением из расслоения Хопфа, тривиально: $\tilde{X} \sim D^2 \times S^1$. Рассмотрим любое непрерывное сечение этого расслоения, например множество вида $D^2 \times u$ для произвольной точки $u \in S^1$. Каноническое отображение $\tilde{X} \to X$ переводит это сечение в относительный сфероид пары (X_2, X_0). Его граница в группе $\pi_1(X_0) \cong H_1(X_0) = E^2_{0,1} \simeq \mathbf{Z}$ описывается тем, сколько раз граничная окружность этого относительного сфероида наматывается на слой $X_0 = S^1$. Это число встречалось нам при описании граничного гомоморфизма $\pi_2(B) = \pi_2(X, F) \to \pi_1(F)$ в гомотопической последовательности. Для расслоения Хопфа этот гомоморфизм является изоморфизмом, то есть граница относительного сфероида — образующая фундаментальной группы слоя.

Имеется много расслоений вида $X \xrightarrow{S^1} S^2$. Для всех таких расслоений второй член спектральной последовательности будет тем же самым. Вся разница лишь в гомоморфизме $E^2_{2,0} \to E^2_{0,1}$. Он может быть произвольным. Например, гомоморфизм, переводящий образующую группы $E^2_{2,0}$ в удвоенную образующую $E^2_{0,1}$, возникает, если X — пространство единичных касательных векторов к S^2 (очевидно диффеоморфное группе Ли $SO(3)$, то есть множеству ортонормированных реперов в $\mathbf{R}^3$), а проекция сопоставляет касательному вектору к S^2 точку его приложения (или, эквивалентно, ортонормированному реперу — его первый вектор).

Задача. Доказать, что для любого целого n существует расслоение вида $X \xrightarrow{S^1} S^2$, для которого гомоморфизм $E^2_{2,0} \to E^2_{0,1}$ переводит образующую в n-кратную образующую.

Функториальность

Если заданы расслоение над B и отображение $\varphi : B' \to B$, то над B' возникает индуцированное расслоение, и мы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow F' & & \downarrow F \\ B' & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array}$$

Если исходное расслоение гомологически просто, то индуцированное расслоение тоже гомологически просто. (Обратное неверно: можно рассмотреть отображение φ, переводящее B' в точку.)

Для спектральных последовательностей в этом случае возникает гомоморфизм, т.е. все диаграммы коммутируют. Это верно не только в случае гомологически простых расслоений.

Более общим образом, пусть $X' \to B'$ и $X \to B$ — два расслоения, вообще говоря с разными слоями F' и F. Отображение $X' \to X$ называется *послойным,* если оно переводит слои в слои, то есть имеет место коммутативная диаграмма, аналогичная приведенной выше, но с F замененным на F' в первом столбце. В этом случае также возникает гомоморфизм спектральных последовательностей расслоения. Если отображение $B' \to B$ — клеточное, то этот гомоморфизм определен уже начиная с членов E^0. Но в силу теоремы о клеточной аппроксимации любое послойное отображение гомотопно отображению с клеточным отображением баз, поэтому начиная с члена E^2 корректно определен гомоморфизм спектральных последовательностей, связанный с произвольным отображением баз.

Теперь мы введем язык, на котором естественно описывается член E^2 спектральной последовательности расслоения в случае гомологически непростых расслоений. (Впрочем, эти понятия очень важны и сами по себе, помимо этого их приложения.)

Локальные системы групп и их гомологии

Пусть B — не очень плохое топологическое пространство; например, линейно связное и локально односвязное. *Локальная система* на B — это накрытие $M \to B$, в каждом слое которого имеется структура абелевой группы, непрерывно зависящая от слоя. Непрерывная зависимость означает следующее. Возьмем два прообраза точки $a \in B$, лежащие на некоторых двух листах, и сложим их. В результате получим третью точку из прообраза той же самой точки a. Рассмотрим теперь прообраз точки a', близкой к точке a (то есть лежащей в ее координатной окрестности, над которой накрытие тривиализуется). Выберем точки прообраза a' на тех же самых двух листах и сложим их. В результате мы должны попасть на тот же самый третий лист. Аналогично описывается условие непрерывности для операции перехода к противоположному элементу.

Ясно, что все слои изоморфны как абелевы группы, но эти изоморфизмы не канонические.

Простейшим примером локальной системы групп служит *тривиальная локальная система* $G \times B \to B$.

Рассмотрим теперь локальные системы с базой S^1 и слоем $\mathbf{R}^1$ (имеется в виду аддитивная группа $\mathbf{R}^1$ с дискретной топологией). Обход вдоль окружности приводит к автоморфизму слоя над отмеченной точкой, и этими автоморфизмами, соответствующими всем (образующим) элементам фундаментальной группы базы, локальная система полностью определяется (с точностью до естественного отношения эквивалентности). Среди автоморфизмов $\mathbf{R}^1$ есть непрерывные автоморфизмы, которые задаются умножением на произвольное ненулевое число. Но есть еще и разрывные автоморфизмы, которые реально в приложениях теории локальных групп никогда не встречаются. Таким образом, все “интересные” локальные системы над S^1 со слоем $\mathbf{R}^1$ однозначно характеризуются ненулевым вещественным числом — коэффициентом растяжения слоя при обходе вдоль базы.

Теорема 3 *Локальные системы над B с слоем G, рассматриваемые с точностью до эквивалентности, находятся во взаимно однозначном соответствии с представлениями $\pi_1(B) \to Aut(G)$. (Два представления считаются эквивалентными, если они сопряжены.)*

Гомологии локальной системы

Пусть $p : M \to B$ — локальная система; Δ^k — k-мерный симплекс; $\varphi_1 : \Delta^k \to M$ и $\varphi_2 : \Delta^k \to M$ — такие сингулярные симплексы в M, что $p\varphi_1 = p\varphi_2$. Тогда можно определить поточечно сумму этих сингулярных симплексов $(\varphi_1 + \varphi_2) : \Delta^k \to M$.

Группой k-мерных цепей локальной системы называют группу сингулярных цепей пространства M, профакторизованную по подгруппе, порожденной соотношениями вида $\varphi_1 + \varphi = (\varphi_1 + \varphi_2)$.

Границы цепей определяются естественным образом. Это определение согласовано с факторизацией по описанным соотношениям. В результате получаем цепной комплекс и вычисляем его гомологии. Эти гомологии называются гомологиями базы с коэффициентами в локальной системе L (или просто гомологиями локальной системы L) и обозначаются $H_*(B, L)$. Например, для тривиальной локальной системы $G \times B$ получим обычные гомологии базы B с коэффициентами в слое G.

Скажем, для тривиального накрытия $B \times \mathbf{Z}$ сингулярный симплекс Δ из базы, умноженный на k, можно рассматривать как элемент $k\Delta$, то есть симплекс Δ, поднятый в лист накрытия, соответствующий элементу $k \in \mathbf{Z}$. В частности, в группе есть элемент 0. При переходе к соседним листам 0 переходит в себя, т.е. нулевой лист выделен. Любой сингулярный симплекс, образ которого лежит в нулевом листе, отождествляется с пустой цепью. Иными словами, брать симплекс с коэффициентом 0 — это то же самое, что не брать его вообще.

Задача. Сколько имеется локальных систем над S^1 со слоем $\mathbf{Z}$?

Ясно, что все операции над абелевыми группами (например, прямая сумма, тензорное произведение, факторизация группы по подгруппе, Hom и т.д.) переносятся на локальные системы.

Пусть задано локально тривиальное расслоение $X \xrightarrow{F} B$. Тогда группы гомологий слоев образуют локальную систему. (Пространство накрытия M состоит из пар вида (*точка* $a \in B$, *элемент группы* $H_*(\pi^{-1}(a))$).) В самом деле, над достаточно малой окрестностью расслоение тривиально, поэтому возникает отождествление групп гомологий слоев над точками этой окрестности, причем это отождествление не зависит от выбора тривиализации. Эту локальную систему будем обозначать $\{H_q(F)\}$.

Теорема 4 *Для любого локально тривиального расслоения над не очень плохой (скажем, клеточной) базой имеет место естественный изоморфизм* $E^2_{p,q} \cong H_p(B, \{H_q(F)\})$. *(Имеются в виду гомологии с коэффициентами в локальной системе групп.)*

Задача. Рассмотрите расслоение $K \xrightarrow{S^1} S^1$, где K — бутылка Клейна. Выпишите для него спектральную последовательность и выясните, как выглядит локальная система.

Есть еще одна знаменитая локальная система групп — ориентирующий пучок многообразия B. Если многообразие B ориентируемо, то для него ориентирующий пучок — тривиальный со слоем $\mathbf{Z}$. Для неориентируемого многообразия B имеется отображение $\pi_1(B) \to \mathbf{Z}_2 = \mathrm{Aut}\,(\mathbf{Z})$ (петля сохраняет или изменяет ориентацию). Поэтому над B возникает локальная система групп Or со слоем $\mathbf{Z}$. Петля $l \in \pi_1(B)$ действует в ее слое как умножение на 1 или -1 в зависимости от того, сохраняется или нарушается вдоль нее ориентация B.

Теорема 5 *Если* B *— компактное линейно связное многообразие размерности* m *без края, то* $H_m(B, Or) \cong \mathbf{Z}$.

Теорема 6 *На неориентируемом многообразии* B *размерности* n *существует двойственность Пуанкаре в более серьезном смысле, чем тот, о котором говорилось в предыдущем курсе. А именно, определено невырожденное спаривание (индекс пересечения)* $H_k(B, \mathbf{Z}) \otimes H_{n-k}(B, Or) \to \mathbf{Z}$.

Если B ориентируемо, то Or $= \mathbf{Z}$, и получаем стандартную теорему двойственности Пуанкаре.

Вот еще один пример, очень важный для теории спецфункций в ТФКП (в особенности гипергеометрических функций.) Рассмотрим локальную систему с базой $B = \mathbf{C}^1 \setminus \{k \quad \text{точек}\}$ и слоем $G = \mathbf{C}^1$. Нас будут интересовать только такие системы, для которых все преобразования слоя, заданные элементами группы $\pi_1(B)$, являются непрерывными автоморфизмами $\mathbf{C}^1$, то есть умножениями на ненулевое комплексное число. Такая локальная система задается k числами $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbf{C}^*$: при обходе вокруг i-й точки (против часовой стрелки) слой умножается на α_i.

Опишем, как устроены гомологии с коэффициентами в этой локальной системе L_α. Если все α_i равны 1, то $H_0 = \mathbf{C}$ и $H_1 = \mathbf{C}^k$.

Теорема 7 *Если хотя бы одно из чисел* α_i *не равно 1, то* $H_0(B, L_\alpha) = 0$ *и* $H_1(B, L_\alpha) = \mathbf{C}^{k-1}$.

Доказательство. Группа $H_0(B, L_\alpha)$ порождается парами вида (точка $a \in B$, ненулевой элемент z слоя над a). Рассмотрим петлю в B, выходящую из a, идущую к той из выброшенных k точек, которой соответствует неединичный коэффициент монодромии α_i, обходящую вокруг этой точки и возвращающуюся по тому же пути, см. рис. 3.

Поднимем этот путь в накрытие M так, чтобы его начало совпадало с точкой z, тогда конец будет совпадать с точкой $\alpha_i z$ в том же слое. В частности, этот путь задает 1-цепь в M, граница которой в комплексе цепей с коэффициентами в L_α равна $(a, (\alpha_i z - z))$. Поскольку $\alpha_i \neq 1$, умножая эту цепь на $1/(\alpha_i - 1)$ мы получим цепь, граница которой совпадает с (a, z). Итак, $H_0(B, L_\alpha) = 0$.

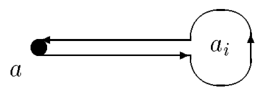

Рис. 3: Простая петля

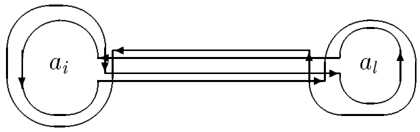

Рис. 4: Двойная петля

Группы гомологий с коэффициентами в локальной системе можно вычислять с помощью клеточного комплекса, образующие которого — это пары вида (клетка, образующая слоя над произвольной внутренней точкой клетки). Граничные операторы между ними задаются с помощью коэффициентов инцидентности; как они определяются мы видели в конце лекции 2 на примере локальной системы $\{H_q(F)\}$.

В любом случае эйлерова характеристика для всех локальных систем с одномерным слоем будет одна и та же: если база компактна (то есть представляет собой конечный CW-комплекс), то это — альтернированная сумма чисел клеток разных размерностей, в случае же некомпактной базы достаточно рассмотреть ее компактный деформационный ретракт. Например, в нашем случае база стягивается на некоторый свой 1-мерный конечный подкомплекс; эйлерова характеристика его равна $1-k$ (это следует из рассмотрения гомологий с постоянными коэффициентами). Следовательно только группа $H_1(B, L_\alpha)$ может быть отлична от нуля, и ее размерность равна минус эйлеровой характеристике, то есть $k-1$. Теорема доказана.

Ситуация с $\alpha_i \neq 1$ возникает при изучении многозначных дифференциальных форм вида

$$(z-a_1)^{\varphi_1} \cdots (z-a_k)^{\varphi_k} dz, \tag{6}$$

тогда $\alpha_i = \exp(2\pi\sqrt{-1}\varphi_i)$.

Такие формы часто встречаются в теории специальных функций.

Типичная образующая группы $H_1(B, L_\alpha) = \mathbf{C}^{k-1}$ изображена на рис. 4 (здесь предполагается что оба коэффициента монодромии α_i, α_l, соответствующие охватываемым точкам, отличны от 1). На самом деле образующая лежит в пространстве накрытия — римановой поверхности формы (6); несложно проверить, что она туда поднимается: действительно, наша кривая обходит каждую точку ветвления один раз в положительном направлении, а другой — в отрицательном.

Задача. Если случайно $\alpha_i = \alpha_l$ или $\alpha_i\alpha_l = 1$, то кривую с рис. 4 можно упростить. Как?

4 Лекция 4

На этой лекции мы разберем некоторые примеры вычисления гомологий с помощью спектральной последовательности.

Упорядоченное конфигурационное пространство

Пусть X — топологическое пространство, тогда через $\mathcal{F}(X,k)$ обозначается множество упорядоченных наборов из k попарно различных точек $(x_1,\ldots,x_k)$ пространства X. Топология на множестве $\mathcal{F}(X,k)$ вводится естественным образом: $\mathcal{F}(X,k)$ является подмножеством в декартовом произведении X^k, а именно, $\mathcal{F}(X,k)=X^k\setminus\Delta$, где Δ — "диагональ", состоящая из всех наборов $(x_1,\ldots,x_k)$, $x_i\in X$, таких что $x_i=x_j$ хотя бы для одной пары индексов $i\neq j$.

Для разных X бывает нужно вычислить гомологии пространства $\mathcal{F}(X,k)$. Мы рассмотрим простейший случай: $X=\mathbf{R}^n$, $n\geq 2$.

Теорема 8

$$\begin{aligned}H_*(\mathcal{F}(X,k)) &\cong H_*(S^{n-1}\times\bigvee_2 S^{n-1}\times\bigvee_3 S^{n-1}\times\cdots\times\bigvee_{k-1}S^{n-1})\\ &\cong H_*(\mathbf{R}^n\setminus\{\textit{одна точка}\}\times\mathbf{R}^n\setminus\{\textit{две точки}\}\times\cdots\times\mathbf{R}^n\setminus\{k-1\ \textit{точка}\}).\end{aligned}$$

Доказательство. *Простой случай* $n>2$. Сопоставим набору из k точек его первую $k-1$ точку. В результате получим локально тривиальное расслоение

$$\mathcal{F}(\mathbf{R}^n,k)\overset{\mathbf{R}^n\text{ без }k-1\text{ точки}}{\longrightarrow}\mathcal{F}(\mathbf{R}^n,k-1). \tag{7}$$

Действительно, слой над набором из $k-1$ точек — это множество всех способов добавить k-ю точку так, чтобы она не совпадала с данными $k-1$ точками. Это как раз и есть $\mathbf{R}^n$ без $k-1$ точки.

При $n>2$ база этого расслоения односвязна. Действительно, $\mathcal{F}(\mathbf{R}^n,k-1)$ представляет собой пространство $\mathbf{R}^{nk}$, из которого выброшены плоскости, заданные условиями $\{x_i=x_j\}$, $x_i\in\mathbf{R}^n\ni x_j$. Коразмерность каждой такой плоскости равна $n\geq 3$. А если из евклидова пространства выбросить подмножество коразмерности ≥ 3, то в результате получим односвязное пространство.

Следовательно, для спектральной последовательности этого расслоения выполняется равенство $E^2_{p,q}=H_p(B,H_q(F))$, где $B=\mathcal{F}(\mathbf{R}^n,k-1)$ и $F=\mathbf{R}^n$ без $k-1$ точки. Гомологии слоя F ненулевые лишь в размерностях $q=0$ и $q=n-1$. Поэтому у члена $E^2_{p,q}$ ненулевыми будут лишь строки с номерами $q=0$ и $q=n-1$. А именно, в нулевой строке стоят гомологии базы, а в строке с номером $q=n-1$ стоят гомологии базы, умноженные на себя $k-1$ раз. Действительно, в строке с номером $q=n-1$ стоят гомологии базы с коэффициентами $\mathbf{Z}^{k-1}$.

По предположению индукции гомологии базы нетривиальны лишь при $p=0,n-1,2(n-1),\ldots,(k-2)(n-1)$. Например, при $n=3$ получим таблицу

$$\begin{array}{ccccccc}\square&0&\square&0&\square&0&\cdots\\ 0&0&0&0&0&0&\cdots\\ \square&0&\square&0&\square&0&\cdots\end{array}$$

В ней ненулевые члены могут стоять только в клетках, обозначенных квадратиками. На эту таблицу не могут действовать нетривиальные дифференциалы ∂^r. (Строго говоря это означает следующее: действие на ней ∂^2 тривиально, следовательно $E^3 = E^2$. Действие дифференциала ∂^3 на E^3 также тривиально, следовательно $E^4 = E^3 = E^2$ и т.д.) Действительно, для всех нетривиальных клеток $E_{p,q}$ тотальная размерность $p+q$ кратна $n-1$, следовательно все группы $E_{p-r,q+r-1}$, в которые могли бы действовать из них нетривиальные дифференциалы, имеют тотальную размерность вида $k(n-1)-1$, что при $n>2$ не может быть кратно $n-1$, то есть все эти группы тривиальны.

Таким образом, спектральная последовательность вырождается во втором члене, т.е. $E^2_{p,q} = E^\infty_{p,q}$. Поэтому $E^\infty_{p,q} = H_p(B, H_q(F))$, в точности как если бы вместо расслоения (7) мы считали гомологии пространства тривиального расслоения $\mathcal{F}(\mathbf{R}^n, k-1) \times (\mathbf{R}^n \setminus k-1$ точка$)$. В частности $H_*(\mathcal{F}(\mathbf{R}^n,k)) \simeq H_*(B\times F)$, причем изоморфизм настоящий, так как все группы свободные.

Случай $n=2$. Этот случай плох сразу по двум причинам:

1) база неодносвязна, поэтому расслоение может оказаться не гомологически простым;

2) не выполняется неравенство $n-1>1$, поэтому дифференциалы могут быть ненулевыми.

Как мы сейчас убедимся, ни той ни другой неприятности не происходит. Гомологическая простота расслоения следует непосредственно из определения конфигурационного пространства. Слой рассматриваемого расслоения — $\mathbf{R}^2$ без $k-1$ точки. Группа одномерных гомологий слоя задается $k-1$ окружностью, каждая из которых обходит одну из этих точек в положительном направлении. Фундаментальная группа базы тривиально действует на одномерных гомологиях: окружности возвращаются на свои места. На нульмерных гомологиях действие всегда тривиально (если слой — линейно связное пространство).

Остается доказать, что спектральная последовательность вырождается, т.е. $E^2_{p,q} = E^\infty_{p,q}$.

Рассмотрим произвольное локально тривиальное расслоение $X \xrightarrow{F} B$ с линейно связным слоем. Для спектральной последовательности этого расслоения выполняется равенство

$$\bigoplus_{p+q} E^\infty_{p,q}(X) = \text{градуированная группа, присоединенная к фильтрованной группе} \quad H_{p+q}(X).$$

С помощью спектральной последовательности можно описать отображение $H_*(X)\to H_*(B)$ следующим образом. Нижняя строка члена E^2 совпадает с гомологиями базы: $E^2_{p,0}(X) \cong H_p(B)$. С ростом r группы $E^r_{p,0}$ этой строки последовательно уменьшаются: $E^\infty_{p,0}(X) \subset E^2_{p,0}(X) = H_p(B)$. С другой стороны, для базы тоже можно рассмотреть спектральную последовательность, заданную ее фильтрацией остовами. Она вырождается в члене $E^2(B) \equiv E^\infty(B)$. Справедливы следующие утверждения:

1) Проекция $X\to B$ задает гомоморфизм этих двух спектральных последовательностей.

2) Этот гомоморфизм устроен следующим образом. За группу m-мерных гомологий X отвечает диагональ $\{p+q=m\}$ в таблице $E^\infty_{p,q}(X)$. В ее клетке $E^\infty_{0,m}$ стоит группа всех классов гомологий, которые можно реализовать циклами, лежащими в слое над одной точкой. В клетке $E^\infty_{1,m-1}$ — группа всех классов гомологий, реализуемых циклами, проекции которых — одномерные комплексы, профакторизованная по предыдущей подгруппе $E^\infty_{0,m}$, и т.д. При проекции все клетки диагонали, кроме последней группы $E^\infty_{m,0}$, отображаются в нуль.

Ядро отображения $H_m(X) \to H_m(B)$, заданное проекцией, натянуто на все эти группы. Нетривиальная часть этого отображения — тождественное вложение подгруппы $E^{\infty}_{m,0}(X)$ в $E^2_{m,0}(X) \equiv E^{\infty}_{m,0}(B)$.

Вернемся к доказательству того, что спектральная последовательность расслоения (7) вырождается в члене E^2 и при $n = 2$. Допустим, что для некоторого p имеется ненулевой дифференциал $\partial^2 : E^2_{p,0} \to E^2_{p-2,1}$ (других ненулевых дифференциалов ∂^r, $r > 2$, быть не может "по соображениям размерности"). Это означает, что та группа $E_{p,0}$, которая была, уменьшается, т.е. не вся группа гомологий базы порождается циклами, которые лежат в образе проекции. Но рассматриваемая проекция задает в гомологиях отображение на, потому что у нашего расслоения есть непрерывное сечение. Действительно, пусть $z_1, \ldots, z_{k-1} \in \mathbf{C}$ — попарно различные точки. Сопоставим набору $(z_1, \ldots, z_{k-1})$ точку z_k, где $\Re z_k = \max_{i=1,\ldots,k-1}(\Re z_i + 1)$, $\operatorname{Im} z_k = 0$. В результате получим непрерывное сечение расслоения: $\Re z_k > \Re z_i$, поэтому $z_k \neq z_i$. Таким образом, любой класс гомологий базы получается проекцией из класса гомологий тотального пространства. Спектральная последовательность снова выродилась.

Пространство петель сферы S^n

Пространство петель ΩX топологического пространства X — это пространство отображений $\varphi : I = [0,1] \to X$, для которых $\varphi(0) = \varphi(1) = x_0$, где x_0 — отмеченная точка. Топология на пространстве петель (как и обычно для пространства непрерывных отображений $Y \to X$ с компактным Y) — это "открыто–замкнутая топология": ее базу образуют все такие подмножества, что ....

В нашем случае (когда $Y = I$) она обладает следующим полезным свойством: для компактного множества D отображение $\varphi : D \to \Omega X$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывно определяемое им отображение $D \times I \to X$, переводящее точку $(y,t) \in D \times I$ в $\varphi(y)(t)$.

Займемся вычислением $H_*(\Omega S^n)$ при $n \geq 2$.

Расслоение Серра

Обозначим через σX пространство непрерывных отображений $\varphi : I = [0,1] \to X$ таких что $\varphi(0) = x_0$. Рассмотрим отображение $\sigma X \xrightarrow{\Omega X} X$, которое каждому отображению сопоставляет $\varphi(1)$. Это отображение в некотором разумном смысле — расслоение (для него можно написать спектральную последовательность). Это отображение называют *расслоением Серра.* Оно замечательно тем, что тотальное пространство σX стягиваемо.

Расслоение в смысле Серра

Расслоением в смысле Серра называют отображение $X \to Y$, для которого выполнено условие накрывающей гомотопии. Все слои расслоения в смысле Серра гомотопически эквивалентны. Для расслоения в смысле Серра тоже можно написать спектральную последовательность расслоения.

Расслоение Серра $\sigma X \xrightarrow{\Omega X} X$ является расслоением в смысле Серра. Его тотальное пространство σX очевидно стягиваемо, а слой над точкой $x_0 \in S^n$ — это в точности ΩS^n.

Для расслоения Серра $\sigma S^n \xrightarrow{\Omega S^n} S^n$ запишем спектральную последовательность. База односвязна, поэтому $E^2_{p,q} = H_p(B, H_q(F))$. Мы хотим вычислить $H_q(F)$. Гомологии базы $B = S^n$ нам известны. Ненулевые члены есть только в двух столбцах, причем эти столбцы одинаковые: $H_0(S^n, G) = H_n(S^n, G)$ для любой группы G, в частности для $G = H_*(F)$. Слой линейно связен, поэтому в нулевой строке стоят две группы $\mathbf{Z}$. Ясно, что $E^2 = \ldots = E^n$, так как соответствующие дифференциалы из ненулевого столбца с номером $p = n$ действуют в нулевые столбцы. На E^n дифференциал из ненулевого столбца с номером $p = n$ действует в ненулевой столбец с номером $p = 0$, причем это единственный момент, когда может уничтожиться группа $\mathbf{Z}$, стоящая в клетке $E^2_{n,0}$. В конце всё (кроме группы $\mathbf{Z}$ в клетке $E_{0,0}$) должно исчезнуть, поскольку тотальное пространство стягиваемо. Следовательно, рассматриваемый дифференциал — изоморфизм, а значит, в клетке $E^2_{0,n-1}$ стоит группа $\mathbf{Z}$. Из равенства двух столбцов получаем, что $E^2_{n,n-1} \cong \mathbf{Z}$, и т.д. В итоге получаем

$$H_i(\Omega S^n) = \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{при } i \text{ кратном } n-1; \\ 0 & \text{при } i \text{ не кратном } n-1. \end{cases}$$

Когда рассказывают про спектральную последовательность расслоения, всегда упоминают три свойства. Одно из них уже обсуждалось: как в терминах спектральной последовательности описывается отображение из гомологий тотального пространства в гомологии базы.

Еще есть отображение из гомологий слоя в гомологии тотального пространства: $H_*(F) \to H_*(X)$. Ясно, что $H_m(F) = E^2_{0,m}(X)$ (здесь мы предполагаем, что база линейно связна, а расслоение гомологически просто). Группа $H_m(X)$ описывается через группы $E^\infty_{p,q}(X)$, $p+q = m$. Она содержит подгруппу, изоморфную $E^\infty_{0,m}(X)$. С другой стороны, имеется отображение $E^2_{0,m}(X) \to E^\infty_{0,m}(X)$, заданное отображением факторизации по образам всевозможных дифференциалов ∂^r, $r \geq 2$, последовательно действующих в клетки $E^r_{0,m}$ из клеток $E^r_{r,m-r+1}$. Это и есть описание отображения гомологий слоя в гомологии тотального пространства (в частности, это отображение действует в подгруппу $E^\infty_{0,m} \subset H_m(X)$.

Следующее замечание связано с *трансгрессией.* Так называют очередной дифференциал ∂^p, действующий из нижней строки в левый столбец, то есть из группы $E^p_{p,0}$ в $E^p_{0,p-1}$. Элементы аналогичных членов таблицы E^2 являются гомологиями базы и слоя: $E^2_{p,0} = H_p(B)$, $E^2_{0,p-1} = H_{p-1}(F)$.

Таким образом, трансгрессия — это частичное многозначное отображение из $H_p(B)$ в $H_{p-1}(F)$. Частичное потому, что оно определено на некоторой подгруппе в $H_p(B)$ (а именно, на $E^p_{p,0}$). Многозначное потому, что образ — элемент не группы $H_{p-1}(F)$, а лишь ее факторгруппы $E^p_{0,p-1}$, т.е. смежный класс.

Трансгрессия бывает удобна при разных вычислениях.

У трансгрессии есть некоторый геометрический смысл. Для расслоения есть точная последовательность гомотопических групп

$$\ldots \pi_i(F) \to \pi_i(X) \to \pi_i(B) \to \pi_{i-1}(F) \to \ldots$$

Для гомологий такой точной последовательности нет. Но есть ее недоделанный вариант — это и есть геометрическая интерпретация трансгрессии. Трансгрессия определена на образе отображения

$$H_p(X, F) \to H_p(B, b_0) = \tilde{H}_p(B).$$

Берем элемент образа этого отображения и поднимаем его каким-то образом (неоднозначно) до элемента группы $H_p(X, F)$. Затем берем границу этого элемента, то есть элемент группы $H_{p-1}(F)$. Из-за произвола в выборе прообраза результат может измениться на элемент группы, по которой факторизуем, переходя к другим членам спектральной последовательности. Полученное отображение совпадает с трансгрессией, определенной выше в терминах спектральных последовательностей.

Когомологическая спектральная последовательность

Как обычно в теории гомологий, всюду выше мы могли перейти к двойственным объектам, обратить все стрелочки за счет перехода к сопряженным отображениям, и приспособить всю теорию спектральных последовательностей к вычислению когомологий.

Задача 1 *Как выглядят для когомологий аналоги всего того, что было сделано для гомологий?*

Но, как мы видели в предыдущем курсе, для когомологий появляется и нечто новое — мультипликативная структура. Такая структура есть и у спектральной последовательности расслоения.