В. А. Васильев

Топология

Специальный курс, осенний семестр 1997 г.

1 Лекция 11

Эта и следующая лекции свяжут домашнее задание с тем, что говорилось раньше.

Струи

Пусть M, N — гладкие многообразия, и $f : M \to N$ — гладкое отображение (т.е. непрерывно дифференцируемое столько раз, сколько нужно). Фиксируем точку $x \in M$ и рассмотрим другое гладкое отображение $g : M \to N$. Говорят, что f и g имеют одну k-струю в точке x, если в окрестности этой точки отображения f и g отличаются на малую более высокого порядка, чем k, т.е. $f(x) = g(x)$ и

$$\|f(x') - g(x')\| = O(\|x' - x\|^{k+1}).$$

Иными словами, если фиксировать локальные системы координат в окрестностях точек x и $f(x)$, то начальные отрезки рядов Тэйлора (от степени 0 до степени k) должны совпадать, т.е. все частные производные до порядка k должны совпадать. Очевидно, принадлежность к одной k-струе есть отношение эквивалентности на множестве гладких отображений $M \to N$.

k-струя — это класс эквивалентности относительно этого отношения эквивалентности.

Задача 1 *Какова размерность пространства струй отображений M в N, переводящих x в y?*

Если N — линейное пространство, то струи можно складывать (функции можно складывать, отношение эквивалентности сохраняется).

Введем следующие обозначения:

$J^k_x(M, N)$ — пространство всех k-струй в точке $x \in M$;

$J^k(M, N)$ — пространство вообще всех k-струй.

Возникает расслоение $J^k(M, N) \to M$ со слоем $J^k_x(M, N)$.

Задача 2 *Что такое $J^0(M, N)$ и $J^1(M, N)$?*

Если M и N — гладкие многообразия, то и $J^k(M, N)$ — гладкое многообразие. Действительно, если M и N — координатные линейные пространства, $M = \mathbf{R}^m$, $N = \mathbf{R}^n$, то имеется очевидное отождествление $J^k(M, N) = M\times$ (пространство наборов из n полиномов степени $\leq k$ от m переменных). Это — линейное пространство, в частности гладкое многообразие. Далее, пусть M и N произвольны, а U и V — две координатные окрестности в M и N. Рассмотрим в $J^k(M, N)$ подмножество (U, V), состоящее из струй отображений, приложенных в точках $x \in U$ и отображающих эти точки в V. Системы координат в U и V отождествляют такое подмножество с некоторым открытым подмножеством в линейном пространстве $J^k(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$, то есть превращают его в открытую *карту*. Такие подмножества (U, V), соответствующие разным U

и V, определяют покрытие $J^k(M,N)$. На пересечении разных таких множеств (U_i, V_i) и (U_j, V_j) функции перехода между стандартными координатами соответствующих карт гладко выражаются через частные производные функций перехода локальных систем координат на M и N в $U_i \cap U_j$ и $V_i \cap V_j$ соответственно. Следовательно, эта система карт (U, V) задает гладкий атлас на множестве $J^k(M,N)$, превращая его в гладкое многообразие.

В частности, в $J^k(M,N)$ определена стандартная топология.

Всегда имеется последовательность расслоений

$$\cdots \to J^k(M,N) \to J^{k-1}(M,N) \to \cdots$$

Если N — линейное пространство, то все эти расслоения векторные.

Струйное расширение

Пусть $f : M \to N$, $f \in C^k(M,N)$. Отображение f естественным образом определяет сечение расслоения $J^k(M,N) \to M$: любой точке $x \in M$ сопоставляется k-струя отображения f в точке x. Это сечение называют k-струйным расширением отображения f и обозначают так: $j^k(f)$. Например, 0-струйное расширение f — это график f.

Топология Уитни

Топологию в пространстве $C^k(M,N)$ можно ввести разными способами. Для многих целей бывает удобна следующая топология, введенная Уитни.

Пусть $W \subset J^k(M,N)$ — открытое подмножество. Ему можно сопоставить множество $\{W\} \subset C^k(M,N)$, состоящее из тех отображений, образы k-струйных расширений которых лежат в W. Чтобы $\{W\}$ было непусто, W должно удовлетворять сильным ограничениям. Например, проекция W на M должна совпадать с M.

Топология Уитни в $C^k(M,N)$ — это топология, база которой состоит из всевозможных областей вида $\{W\}$.

Эти понятия нам нужны для того, чтобы правильно сформулировать понятие отображения *общего положения* или, как еще говорят, *типичного отображения*. Вот еще одно необходимое понятие.

Трансверсальность

Пусть K и L — подмногообразия в N. Они называются *трансверсальными* в точке $x \in N$, если выполнено одно из двух:

1) одно из них не проходит через x,

2) они оба проходят через x и тогда

$$T_xK + T_xL = T_xN,$$

то есть касательное пространство к N в точке x является линейной оболочкой своих подпространств T_xK и T_xL.

Подмногообразия K и L называются трансверсальными, если они трансверсальны в любой точке $x \in N$.

Есть и другие понятия трансверсальности. Пусть, например, $\varphi : K \to N$ и $\psi : L \to N$ — два отображения. Отображения φ и ψ называются трансверсальными в точке $(x, y) \in K \times L$, если либо $\varphi(x) \neq \psi(y)$, либо $\varphi(x) = \psi(y)$ и пространства $D\varphi(T_x K)$ и $D\psi(T_y L)$ — образы касательных пространств к K и L под действием дифференциалов отображений ϕ и ψ — порождают всё пространство $T_{\varphi(x)}N$.

Отображения φ и ψ называются трансверсальными, если он трансверсальны в любой точке $(x, y) \in K \times L$.

Например, трансверсальность подмногообразий в смысле предыдущего определения эквивалентна трансверсальности их тождественных вложений.

Если $\dim K + \dim L < \dim N$, то отображения ϕ и ψ трансверсальны тогда и только тогда, когда $\phi(K)$ не пересекается с $\psi(L)$.

Промежуточный вариант понятия трансверсальности: пусть L — подмногообразие в N и $\varphi : K \to N$ — гладкое отображение. Тогда φ трансверсально подмногообразию L, если φ и тождественное вложение L в N трансверсальны в смысле предыдущего определения.

Слабая теорема трансверсальности

Пусть в многообразии N есть замкнутое подмногообразие L. Рассмотрим всевозможные отображения $\varphi : K \to N$. Тогда в любом пространстве $C^k(K, N)$, $k \geq 1$, отображения φ, трансверсальные к подмногообразию L, образуют плотное (в смысле топологии Уитни) подмножество.

Утверждение о плотности можно усилить: если K компактно, то это подмножество будет не только плотным, но и открытым. А если K произвольное, то это подмножество является не более чем счетным пересечением открытых плотных подмножеств (в частности, оно плотно).

Эта теорема достаточно простая.

Сильная теорема трансверсальности, или теорема трансверсальности Тома

Пусть в многообразии $J^k(M, N)$ есть гладкое замкнутое подмногообразие L. Тогда в любом пространстве $C^r(K, N)$, где $r > k$, отображения $\varphi : M \to N$, k-струйные расширения $j^k(\phi)$ которых трансверсальны подмногообразию L, образуют плотное подмножество.

Утверждение о плотности снова можно усилить: если K компактно, то это подмножество будет не только плотным, но и открытым. А если K произвольное, то это подмножество является не более чем счетным пересечением открытых плотных подмножеств.

Применим это к какой-нибудь известной ситуации. Пусть, например, $N = \mathbf{R}$ и подмножество $L \subset J^2(M^m, \mathbf{R})$ состоит из всевозможных неморсовских 2-струй. (Функция f неморсовская в точке x, если $df_x = 0$ и матрица Гессе $Hess_x(f) \equiv \{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\}$ вырождена, то есть имеет нулевой определитель.)

Коразмерность L равна $m+1$. Поэтому из теоремы трансверсальности, вроде бы, следует, что почти все функции морсовские: действительно, условие, что функция морсовская, эквивалентно тому, что ее 2-струйное расширение не пересекает множества L или, что то же самое, трансверсально к L. Это рассуждение не вполне корректно: множество L не гладкое, так как условие $\det Hess_x(f) = 0$ не гладкое: множество вырожденных квадратичных форм имеет особые точки, соответствующие формам, ранг которых падает больше чем на 1. Но это поправимо, потому что у теорем трансверсальности есть стратифицированный вариант.

Стратифицированные множества

Типичными представителями стратифицированных множеств являются конус (с особой точкой в вершине), полукубическая парабола (кривая с особой точкой — точкой возврата) и ласточкин хвост. Их полезно иметь в виду, когда речь идет о стратифицированных множествах.

Пусть есть гладкое многообразие T и в нем некоторое подмножество A. Предварительная, или первичная стратификация множества A — это его разбиение на подмножества A_i, удовлетворяющее следующим условиям:

1) разбиение локально конечно;

2) все A_i — гладкие линейно связные подмногообразия (вообще говоря разных размерностей);

3) замыкание любого страта A_i — объединение нескольких стратов, т.е. граница любого страта — объединение конечного числа стратов строго меньшей размерности. (Обозначение: $A_i \succ A_j$, если страт A_j лежит в замыкании страта A_i).

Для полноценной работы с теоремой трансверсальности этих условий не достаточно. Нужно еще дополнительно наложить некоторые условия на касательные пространства примыкающих стратов, точнее, на соотношение между касательным пространством в каждой точке y меньшего страта и предельным поведением касательных пространств к большему, взятых в последовательности его точек x_i, стремящихся к этой точке y. Об этих условиях — *условиях Уитни* — мы поговорим на следующей лекции. Первичная стратификация, удовлетворяющая этим условиям, называется *регулярной стратификацией* или *стратификацией Уитни.*

Еще одно часто встречающееся множество, являющееся стандартным примером стратифицированного множества, таково.

Зонтиком Уитни называют поверхность в трехмерном пространстве, заданную уравнением $x^2 = zy^2$. В своей основной части (лежащей в полупространстве $z \geq 0$) она двумерна, но имеет еще "ручку" — полупрямую $\{z < 0, x = y = 0\}$, являющуюся продолжением линии самопересечения ее двумерной части. Это множество можно естественным образом простратифицировать: у него есть по 2 страта размерностей 1 и 2 и еще 1 страт размерности 0.

Зонтик Уитни столь же естественно возникает в теории *результантных множеств,* как ласточкин хвост возникает в теории дискриминантов. А именно, ласточкин хвост возникает в результате понижения размерности множества $\Sigma_2 \subset \{x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d\}$ с помощью факторизации по действию группы сдвигов аргумента. Если же мы рассмотрим пространство $\mathbf{R}^4$ пар вещественных квадратных трехчленов $x^2 + \alpha x + \beta$ и $x^2 + \gamma x + \delta$, и в нем подмножество Σ, состоящее из пар трехчленов, имеющих общий корень, и снова понизим размерность пары $(\mathbf{R}^4, \Sigma)$ с помощью группы сдвигов аргументов, то получим пару ($\mathbf{R}^3$, зонтик Уитни). При этом ручка зонтика соответствует таким парам полиномов, которые имеют общие невещественные корни, а линия самопересечения — таким, у которых есть пара вещественных совпадающих корней.

Если есть стратифицированное множество, то можно определить трансверсальность к стратифицированному множеству как трансверсальность ко всем его стратам. Все теоремы трансверсальности останутся при этом верными.