В. А. Васильев

Топология

Специальный курс, осенний семестр 1997 г.

1 Лекция 12

Стратифицированные множества

Пусть есть гладкое многообразие M и в нем некоторое подмножество A. *Регулярная стратификация* множества A — это его разбиение на подмножества A_i, удовлетворяющее следующим условиям:

1) разбиение локально конечно;

2) все A_i — гладкие линейно связные подмногообразия (разных размерностей);

3) замыкание любого страта A_i — объединение нескольких стратов, т.е. граница любого страта — объединение конечного числа стратов строго меньшей размерности.

4) касательные пространства правильно ведут себя при примыкании стратов.

Последнее условие строго формулируется разными способами. Один из возможных способов — условие a) Уитни (есть еще условие b) Уитни, более сильное, но на нем мы останавливаться не будем):

пусть есть два примыкающих страта $X \succ Y$(т.е. Y лежит в границе X) и последовательность точек x_i большего страта, сходящаяся к точке y меньшего страта; пусть существует предел касательных плоскостей к многообразию X в этих точках (плоскости рассматриваются как точки грассманова расслоения $G^{\dim X}(TM)$, ассоциированного с касательным расслоением многообразия M), тогда эта предельная плоскость $L \subset T_yM$ должна содержать касательную плоскость к меньшему страту.

Стратификация, удовлетворяющая всем этим свойствам, называется еще *стратификацией Уитни*. Точная формулировка условия b) нам не понадобится, нам будут полезны только следующие свойства регулярных стратификаций.

Свойства стратифицированных множеств

Теорема 1 *У любого алгебраического или аналитического подмножества алгебраического или аналитического многообразия существует регулярная стратификация.*

Теорема 2 *Из регулярности стратификации вытекает C^0-тривиальность вдоль любого страта.*

C^0-тривиальность вдоль любого страта означает следующее. Возьмем точку страта $Y \subset A$ и рассмотрим ее малую шаровую окрестность U в M. Пусть $T \subset U$ — произвольная *трансверсаль* страта Y, то есть гладкое подмногообразие дополнительной размерности $\dim M - \dim Y$, такое что тройка (U, Y, T) диффеоморфна тройке $(\mathbf{R}^{\dim M}, \mathbf{R}^{\dim Y}, \mathbf{R}^{\dim T})$, причем два последних подпространства пересекаются трансверсально. Тогда пара $(U, A \bigcap U)$ гомеоморфна прямому произведению $Y \cap U$ на пару $(T, T \cap A)$. ($T \cap A$ называется еще *трансверсальным срезом* страта Y.)

Теорема 3 *Из C^1-тривиальности вдоль любого страта следует регулярность стратификации.*

(Определение C^1-тривиальности получается из определения C^0-тривиальности, если в нем заменить гомеоморфизм на диффеоморфизм класса C^1.)

Теорема 4 *Пусть имеется отображение $N \to M$ и в M есть регулярное стратифицированное подмножество A. Тогда если в окрестности какой-то точки $y \in M$ отображение трансверсально страту, содержащему эту точку, то вблизи этой точки оно трансверсально и всем бо́льшим стратам.*

На прошлой лекции было сформулировано несколько теорем трансверсальности. Все эти теоремы дословно переформулируются для стратифицированных множеств. Из этого, например, сразу же получаем, что почти все функции имеют только морсовские особенности. Вот еще одно применение теоремы трансверсальности Тома.

Отображение $f : N \to M$ называют иммерсией, если его дифференциал $Df : TN \to TM$ всюду инъективен.

Теорема 5 (Слабая теорема Уитни) *При $m \geq 2n$ почти любое отображение $f : N^n \to M^m$ является иммерсией.*

Чтобы доказать слабую теорему Уитни, рассмотрим в $J^1(N^n, M^m)$ подмножество, состоящее из 1-струй отображений, дифференциал которых имеет в соответствующих точках неполный ранг. Коразмерность этого подмножества равна $m - n + 1$. (Это достаточно проверять локально, в координатах, и следует из того, что множество матриц $n \times m$ неполного ранга имеет коразмерность $m - n + 1$ в пространстве всех матриц.) Поэтому если $m - n + 1 > n$, то условие трансверсальности 1-струйного расширения к этому подмножеству эквивалентно тому, что оно просто не пересекает этого множества, то есть отображение — иммерсия.

Мультиструйная теорема трансверсальности Тома

Пространство мультиструй $J_r^k(N, M)$ определяется как множество объектов следующего вида. Рассмотрим в многообразии N упорядоченный набор из r попарно различных точек и зададим в каждой точке некоторую k-струю отображения $N \to M$.

Пространство $J_r^k(N, M)$ всех таких наборов k-струй очевидным образом является пространством расслоения $J_r^k(N, M) \to F(N, r)$ над конфигурационным пространством $F(N, r)$ наборов из r попарно различных точек.

Пусть задано ещё некоторое подмногообразие или, более общим образом, стратифицированное подмножество $A \subset J_r^k(N, M)$.

Каждое отображение $f : N \to M$ определяет сечение $j_r^k(f)$ указанного выше расслоения. В этом случае тоже верна теорема трансверсальности: множество отображений f, расширение $j_r^k(f)$ которых трансверсально к множеству A, плотно в пространстве всех гладких отображений (и, более того, является не более чем счетным пересечением открытых плотных подмножеств относительно топологии Уитни).

Теорема 6 (Слабая теорема Уитни для вложений) *При $m > 2n$ почти любое отображение $f : N^n \to M^m$ является вложением.*

Действительно, по теореме 5 почти любое такое отображение является иммерсией. Чтобы иммерсия стала вложением, нужно наложить дополнительное условие, которое формулируется в терминах мультиструйных расширений: эти расширения не должны пересекать подмножества в $J_2^k(N,M)$, $k \geq 0$, состоящего из пар струй, значения которых в M совпадают. При $m > 2n$, коразмерность этого подмножества больше чем размерность отображаемого многообразия $F(N,2)$, и теорема сведена к мультиструйной теореме Тома.

Теорема 7 (Сильная теорема Уитни об иммерсиях) *Пусть N^n и M^m — гладкие многообразия, причем N^n компактно. Тогда при $m \geq 2n-1$ ($n \geq 2$) существует иммерсия $f : N^n \to M^m$.*

Нужно разобрать лишь случай $m = 2n-1$. Простейший случай: $m = 3$, $n = 2$. В этом случае почти любое отображение имеет конечное число особых точек, причем вблизи них образ отображения в M^3 объемлемо диффеоморфен зонтику Уитни без "ручки". Канонический пример такой особой точки задается отображением

$$y_1 = x_i x_2, y_2 = x_2, y_3 = x_1^2;$$

любой другой зонтик сводится к этому стандартному подходящим выбором локальных координат y_i в образе и x_i в прообразе. (Для доказательства того, что это — все возможные особенности, возникающие у отображений общего положения, нужно рассмотреть пространство 3-струй $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$. Это — конечномерное пространство. В нем есть неособая часть, соответствующая локальным иммерсиям, и особая. Исследование неособой части особой части (то есть ее максимального страта, который только и может пересекаться струйным расширением типичного отображения $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$) дает требуемый результат.) Из любого зонтика выходит линия самопересечения образа, которая может кончаться только в другом зонтике, поэтому число зонтиков четно. Подтягиваем парные зонтики по линии самопересечения друг к другу и уничтожаем их при помощи стандартной перестройки, см. рис. При произвольном $n > 1$ и $m = 2n-1$ доказательство точно такое же.

При фиксированном n число $m(n)$, для которого для любого многообразия N^n существует иммерсия $N^n \to \mathbf{R}^{m(n)}$, может оказаться меньше $2n-1$. Только при $n = 2^k$ оценка неулучшаема: в следующем семестре мы узнаем, почему многообразие $\mathbf{R}P^n$, $n = 2^k$, нельзя иммерсировать в $\mathbf{R}^{2n-2}$ и нельзя вложить в $\mathbf{R}^{2n-1}$.

Теоремы Смейла — Хирша

Пусть $R \subset C^k(N,M)$ — множество в каком-то смысле неособых отображений. А именно, если задано "особое" множество $A \subset J^k(N,M)$, то $R = R(A)$ — множество таких отображений, что их k-струйные расширения не пересекают A. По-другому можно сказать так: берем отображения, k-струйные расширения которых являются сечениями очевидной проекции $(J^k(N,M) \setminus A) \to N$. Во всех интересных примерах эта проекция — локально тривиальное расслоение (например, когда A соответствует инвариантно определенному классу особенностей отображений). Рассмотрим также пространство R_{form}, состоящее из *всех* непрерывных сечений этого расслоения.

Ясно, что $R \subset R_{form}$. Польза от рассмотрения пространства R_{form} связана с тем, что это пространство устроено проще, чем R. Изучение пространства всех непрерывных сечений локально тривиальных расслоений является классической задачей гомотопической топологии, для решения которой имеются сильные методы. Более того, если многообразие N параллелизуемо, то наше расслоение тривиально, и пространство таких сечений совпадает с пространством непрерывных отображений $N \to (J^k_{(x)}(N, M) \setminus A)$.

С другой стороны, часто эти пространства R и R_{form} оказываются гомотопически эквивалентными. Или у них оказываются хотя бы одинаковые гомологии.

Например, пусть многообразие N^n компактно и $n < m$. Пусть R — множество всех иммерсий $N^n \to M^m$.

Теорема 8 *В таком случае пространство R слабо гомотопически эквивалентно R_{form}, т.е. вложение $R \hookrightarrow R_{form}$ индуцирует изоморфизм всех гомотопических групп, а следовательно и всех групп гомологий и когомологий.*

Эта теорема была доказана Смейлом для случая $N = S^n$, $M = \mathbf{R}^m$, а затем обобщена Хиршем на общий случай.

По-другому в случае $M = \mathbf{R}^m$ эту теорему можно сформулировать следующим образом. Начнем с задачи о существовании такой иммерсии. Есть необходимое условие: если существует иммерсия $N^n \to \mathbf{R}^m$, то существует m таких непрерывных сечений касательного расслоения TN (т.е. векторных полей), что в каждой точке $x \in N$ они порождают касательное пространство в этой точке. Теорема Смейла — Хирша утверждает, что верно и обратное, причем гомотопические классы иммерсий и сечений находятся во взаимно однозначном соответствии. Более того, пространство всех таких наборов и пространство иммерсий слабо гомотопически эквивалентны.

Есть и другие примеры, когда выполняется принцип Смейла — Хирша. Пусть подмножество $\mathcal{F} \subset C^\infty(\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^1)$ состоит из функций, тождественно равных 1 на бесконечности. Рассмотрим в $\mathcal{F}$ подмножество

$$\Sigma_k = \{f | \exists x : \quad f(x) = f'(x) = \ldots = f^{(k-1)}(x) = 0\}.$$

Когомологии пространства $\mathcal{F} \setminus \Sigma_k$ мы уже вычисляли:

$$H^i(\mathcal{F} \setminus \Sigma_k) = \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{при } i \text{ кратном } k-2; \\ 0 & \text{при всех остальных } i. \end{cases}$$

В терминах струйных расширений множество Σ_k описывается следующим образом. Рассмотрим расслоение $J^{k-1}(\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^1) \to \mathbf{R}$, $k \geq 3$. Это расслоение тривиально: $J^{k-1}(\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^1) = \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^k$. В $J^{k-1}(\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^1)$ выделим подмножество R, над любой точкой $x \in \mathbf{R}^1$ заданное условием $f(x) = f'(x) = \ldots = f^{(k-1)}(x) = 0$, т.е. нулевое сечение этого расслоения. Ясно, что $f \in \Sigma_k$ тогда и только тогда, когда ее струйное расширение пересекает это нулевое сечение. Таким образом, каждая функция из $\mathcal{F} \setminus \Sigma_k$ задает сечение расслоения со слоем $\mathbf{R}^k \setminus 0$. Это сечение представляет собой петлю в $\mathbf{R}^k \setminus 0$, а следовательно и в S^{k-1}. Таким образом, получаем вложение $\mathcal{F} \setminus \Sigma_k \hookrightarrow \Omega(\mathbf{R}^k \setminus 0) \simeq \Omega S^{k-1}$. Гомологии пространства ΩS^{k-1} вычислялись раньше, при изучении спектральных последовательностей расслоений, и ответ для этих групп оказался точно такой же как для $\mathcal{F} \setminus \Sigma_k$. Оказывается, что это не случайное совпадение: этот изоморфизм групп гомологий задается естественным струйным вложением $\mathcal{F} \setminus \Sigma_k \to \Omega S^{k-1}$, более того, это вложение является гомотопической эквивалентностью.