В. А. Васильев
Топология

Специальный курс, осенний семестр 1997 г.

1 Лекция 13

В прошлый раз обсуждался принцип Смейла — Хирша и в связи с ним обсуждался такой пример. Пусть подпространство $\mathcal{F} \subset C^\infty(\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^1)$ состоит из функций, тождественно равных 1 на бесконечности. Рассмотрим в $\mathcal{F}$ подмножество

$$\Sigma_k = \{f | \exists x : \quad f(x) = f'(x) = \ldots = f^{(k-1)} = 0\}.$$

Мы будем предполагать, что $k \geq 3$. Гомологии пространства $\mathcal{F} \setminus \Sigma_k$ такие же, как гомологии пространства $\Omega(S^{k-1})$. Это не просто случайное совпадение. Дело в том, что отображение $\mathcal{F} \setminus \Sigma_k \to \Omega(\mathbf{R}^k \setminus 0) \sim \Omega(S^{k-1})$, сопоставляющее функции ее $(k-1)$-струйное расширение, при $k \geq 3$ индуцирует гомотопическую эквивалентность. При $k > 3$ пространство $\mathcal{F} \setminus \Sigma_k$ односвязно, поэтому достаточно доказать, что это отображение индуцирует изоморфизм гомологий. При $k = 3$ утверждение о гомотопической эквивалентности также верно, но доказывается сложнее.

Изоморфизм гомологий доказывается следующим образом. При вычислении гомологий пространства $\mathcal{F} \setminus \Sigma_k$ мы аппроксимировали его конечномерными пространствами $P_d \setminus \Sigma_k$. Гомологии пространства $\Omega(\mathbf{R}^k \setminus 0)$ вычисляются аналогично: это пространство аппроксимируется пространствами $\Pi(m,k) \setminus \Sigma(m,k)$. Здесь $\Pi(m,k)$ — пространство систем из k многочленов

$$\begin{cases} x^m + a_1^1 x^{m-1} + \cdots + a_1^m, \\ \qquad\cdots \\ x^m + a_k^1 x^{m-1} + \cdots + a_k^m. \end{cases}$$

(На самом деле, на бесконечности многочлены ведут себя не так, как нужно. Но их можно пригладить и получить отображение в отмеченную точку.) Пространство $\Sigma(m,k)$ соответствует системам, имеющим общее решение. Группы гомологий и когомологий пространств $\Pi(m,k) \setminus \Sigma(m,k)$ при $m \to \infty$ сходятся к аналогичным группам пространства $\Omega(\mathbf{R}^k \setminus 0)$, т.е. для любого i найдется $m_0 = m_0(i)$ такое что при всех $m \geq m_0$ имеются изоморфизмы $H^j(\Pi(m,k) \setminus \Sigma(m,k)) \simeq H^j(\Omega(\mathbf{R}^k \setminus 0))$ при $j < i$. Более того, это же верно и для всех гомотопических групп.

Гомологии пространства $\Pi(m,k) \setminus \Sigma(m,k)$ вычисляются точно так же, как и гомологии пространства $P_d \setminus \Sigma_k$. А именно, пользуясь двойственностью Александера сводим эту задачу к вычислению замкнутых гомологий особого множества $\Sigma(m,k)$, затем строится симплициальное разрешение этого множества, и на этом разрешении берется фильтрация $F_1 \subset F_2 \subset \ldots$, где $F_i \setminus F_{i-1}$ — расслоение над $B(\mathbf{R}^1, i)$ со слоем $\overset{\circ}{\Delta}{}^{i-1} \times \mathbf{R}^{(m-i)k}$. Спектральная последовательность выглядит точно так же, и можно сравнить напрямую аппроксимирующие пространства. Если удастся доказать естественную изоморфность групп гомологий этих пространств, то предельным переходом получим искомый изоморфизм между когомологиями бесконечномерных пространств $\Omega(\mathbf{R}^k \setminus 0)$ и $\mathcal{F} \setminus \Sigma_k$.

На самом деле имеет место гораздо более точный факт: пространства $P_{mk} \setminus \Sigma_k$ и $\Pi(m,k) \setminus \Sigma(m,k)$ гомотопически эквивалентны. Доказывается это довольно сложно, в частности потому что построить отображения, являющиеся гомотопическими эквивалентностями, нелегко. Для этого их нужно сначала вложить в одно и то же пространство, а именно, в пространство систем многочленов

$$\left\{ \begin{array}{l} x^{mk} + \cdots \\ x^{mk-1} + \cdots \\ \cdots \\ x^{mk-k+1} + \cdots \end{array} \right. \tag{1}$$

Пространство P_{mk} вкладывается следующим образом: каждому полиному сопоставляем его самого и его производные (точнее говоря, производные, деленные на некоторое число, чтобы старший коэффициент многочлена был равен 1).

Пространство $\Pi(m,k)$ вкладывается следующим образом: каждой полиномиальной системе сопоставляется большой отрезок, вне которого она не может иметь общих корней. Затем полиномы из нашей системы домножаются на полиномы подходящих степеней, все корни которых лежат далеко за пределами этого отрезка и заведомо все различны. Эти вложения отображают дискриминантные множества в дискриминантное множество и поднимаются до вложений симплициальных разрешений этих пространств. Из совпадения первых членов спектральных последовательностей с помощью леммы Борсука доказывается, что эти вложения продолжаются до гомотопической эквивалентности подходящих кратных надстроек одноточечных компактификаций пространств разрешений σ_k и $\sigma(m,k)$ на одноточечную компактификацию m-го члена фильтрации разрешения дискриминанта в пространстве систем (1). Отсюда уже следует, что наши вложения индуцируют изоморфизм групп когомологий обоих пространств $P_{mk} \setminus \Sigma_k$ и $\Pi(m,k) \setminus \Sigma(m,k)$ на некоторый начальный отрезок группы когомологий множества нерезультантных систем вида (1). Отсюда выводится (с использованием специфических свойств пространств петель) что оба пространства гомотопически эквивалентны m-мерному остову последнего пространства, а также и пространства ΩS^{k-1}.

Группы кос и их гомологии

Если X — топологическое пространство, то через $B(X,k)$ обозначается его k-*е конфигурационное пространство,* т.е. множество всех неупорядоченных наборов из k попарно различных точек в X; $F(X,k)$ — пространство упорядоченных наборов, т.е. $F(X,k) = X^k \setminus \Delta$, где

$$\Delta = \{x_1, \ldots, x_k)|x_i = x_j \quad \text{для некоторых} \quad i \neq j\}.$$

Топология на $F(X,k)$ определяется очевидным образом. На $F(X,k)$ действует группа подстановок $S(k)$ и $B(X,k) = F(X,k)/S(k)$. Это позволяет определить (фактор)топологию на $B(X,k)$.

Определение. Группа кос из k нитей, $Br(k)$, это группа $\pi_1(B(\mathbf{R}^2,k))$.

Предложение. $B(\mathbf{R}^2,k)$ — *пространство типа* $K(Br(k),1)$, *т.е. все остальные гомотопические группы нулевые. Аналогично,* $F(\mathbf{R}^2,k)$ *также пространство типа* $K(\pi,1)$ *для* *некоторой группы, которая обозначается $I(k)$ и называется группой крашеных кос из k нитей.*

Для доказательства этого утверждения можно рассмотреть точную гомотопическую последовательность расслоения $F(\mathbf{R}^2, k) \to F(\mathbf{R}^2, k-1)$ со слоем $\mathbf{R}^2 \setminus \{k-1 \quad \text{точка}\}$. У $\mathbf{R}^2 \setminus \{k-1 \quad \text{точка}\}$ все гомотопические группы порядка ≥ 2 нулевые, поэтому можно применить индукцию. Ясно также, что все гомотопические группы порядка ≥ 2 у пространств $B(\mathbf{R}^2, k)$ и $F(\mathbf{R}^2, k)$ одинаковые.

Рассмотрим теперь объекты, которые, собственно, и называются косами. Рассмотрим квадрат, вложенный в $\mathbf{R}^3$. Отметим на левой и правой сторонах квадрата по k точек, лежащих точно напротив друг друга, и соединим каждую точку с левой стороны с некоторой точкой на правой стороне системой непересекающихся C^1-гладких нитей в $\mathbf{R}^3$, при этом при движении точки по нити ее координата на горизонтальной оси должна быть строго монотонной функцией, т.е. при движении от одной стороны квадрата к другой стороне нить не должна поворачивать обратно. Две косы *эквивалентны,* если их можно перевести друг в друга непрерывной деформацией в пространстве всех кос, см. например рисунки ниже.

Прикладывая правую сторону одного квадрата к левой стороне другого квадрата, стирая эту сторону, а затем сжимая полученный прямоугольник, получаем групповую операцию на множестве классов эквивалентности кос.

Эта интерпретация группы кос легко получается из предыдущей: выберем в пространстве $B(\mathbf{R}^2, k)$ в качестве отмеченной точки конфигурацию из k точек, лежащих на единичном отрезке и отождествим этот отрезок с левой стороной квадрата. В качестве нижней стороны выберем ось t. Тогда элемент группы $Br(k) = \pi_1(B(\mathbf{R}^2, k))$ как раз и будет представлен такой косой, потому что при $t = 1$ мы возвращаемся в отмеченную точку.

Обратный элемент группы кос получается как зеркальное отражение косы.

Третье определение группы кос — алгебраическое, с помощью образующих и соотношений. Группа кос $Br(k)$ — это группа с образующими $a_1, \ldots, a_{k-1}$ и соотношениями

$a_i a_j = a_j a_i$, если $|i - j| \geq 2$;

$a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1}$.

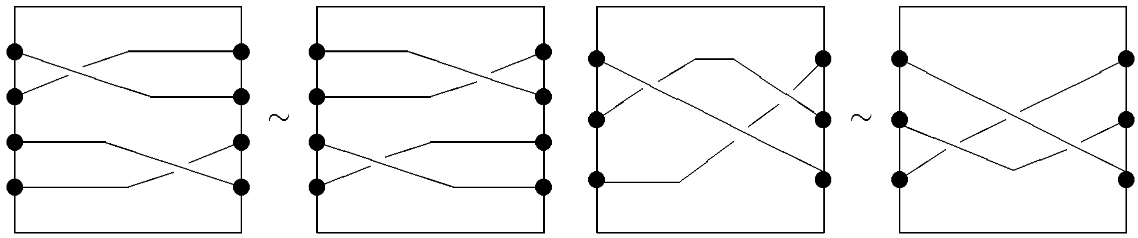
Образующие $a_1, \ldots, a_{k-1}$ — это элементарные косы, т.е. косы с одним перекрестком. Если i-я нить проходит под $(i+1)$-й, то получаем образующую a_i, а если i-я нить проходит над $(i+1)$-й, то получаем образующую a_i^{-1}.

Любую косу малым шевелением можно привести к такому виду, что точки пересечения (перекрестки) будут лежать на разных вертикальных прямых. Проведя вертикальные разрезы так, чтобы между любыми двумя вертикальными прямыми был расположен только один перекресток, получим представление косы в виде композиции элементарных кос.

Соотношения возникают из преобразований, изображенных на рисунке.

Имеется нетривиальный гомоморфизм $Br(k) \to \mathbf{Z}$. А именно, каждому слову, составленному из образующих, можно сопоставить сумму степеней образующих.

Теперь четвертое определение: $Br(k) = \pi_1(P_k^{\mathbf{C}} \setminus \Sigma_2)$, где $P_k^{\mathbf{C}}$ — пространство полиномов $x^k + \lambda_1 x^{k-1} + \cdots + \lambda_k$ с комплексными коэффициентами; из этого пространства выбрасывается множество Σ_2 полиномов с кратными комплексными корнями. Во многих ситуациях это определение самое удобное.



Стабильная группа кос

Рассмотрим вложение $Br(k) \subset Br(k+r)$, устроенное следующим образом: к косе из $Br(k)$ пририсовываем снизу r тривиальных (горизонтальных) нитей. Предел (объединение) таких групп — это стабильная группа кос Br.

По-другому вложение $Br(k) \subset Br(k+r)$ можно описать следующим образом. К набору точек $(z_1, \ldots, z_k)$ добавляем точку $z_{k+1} = (\max |z_i| + 1, 0) \in \mathbf{R}^2$. Затем повторяем эту процедуру еще $r-1$ раз.

Правильная задача — вычисление гомологий групп $Br(k)$. (Напомним, что гомологиями топологической группы g называются гомологии соответствующего классифицирующего пространства, то есть, в случае дискретных групп, пространства $K(g,1)$. В частности, $H^*(Br(k)) \equiv H^*(B(\mathbf{R}^2, k)) \equiv H^*(P_k^{\mathbf{C}} \setminus \Sigma_2)$.)

Для коэффициентов $\mathbf{Z}_2$ эту задачу решил Д.Б.Фукс (1970).

Первое наблюдение принадлежит Арнольду: $H^i(B(\mathbf{C}^1, k), G) = 0$ при $i \geq k$ для любой группы коэффициентов G. Это вытекает из весьма общей теоремы. Пусть имеется комплексное аффинное алгебраическое многообразие $M^d \subset \mathbf{C}^N$ (d — комплексная размерность). Тогда $H^i(M^d, G) = 0$ при $i > d$. Это доказывается с помощью теории Морса: существует функция Морса, у которой индекс любой критической точки не превосходит d. К рассматриваемой ситуации это применяется следующим образом. Подмножество $\Sigma_2 \subset \mathbf{C}^k$ задается полиномиальным уравнением $\Delta(\lambda) = 0$ (Δ — дискриминант общего полинома степени k с коэффициентами $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$). Рассмотрим пространство $\mathbf{C}^{k+1}$ с координатами $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, t$ и в этом пространстве рассмотрим гиперповерхность $\Delta(\lambda)t = 1$. Проекция этой гиперповерхности на $\mathbf{C}^k$ вне множества $\Sigma_2 \subset \mathbf{C}^k$ является диффеоморфизмом. Поэтому пространство $\mathbf{C}^k \setminus \Sigma_2$ диффеоморфно алгебраическому аффинному многообразию размерности k, а значит, у него нет гомологий размерности больше k.

Но утверждалось нечто большее, а именно, что нет гомологий и в размерности k. Чтобы доказать это, нужно воспользоваться тем, что на паре $(\mathbf{C}^k, \Sigma_2)$ свободно действует группа сдвигов аргумента z, т.е. можно перейти к пространству размерности $k-1$.

Пользуясь двойственностью Пуанкаре, вместо группы $H^*(B(\mathbf{R}^2, k), \mathbf{Z}_2)$ будем вычислять изоморфную ей группу гомологий одноточечной компактификации, $\bar{H}_{2k-*}(B(\mathbf{R}^2, k), \mathbf{Z}_2)$. Эта компактификация устроена так: все уходы точек наших k точек на бесконечность в $\mathbf{R}^2$ и сталкивания (слияния) разных точек соответствуют стремлению к добавленной “бесконечно удаленной” точке. Клеточное разбиение одноточечной компактификации строится следующим образом. Введем на плоскости $\mathbf{R}^2$ координаты (x, y). Конфигурации из k точек сопоставим набор чисел (мультииндекс) $(m_1, \dots, m_t)$, где $\sum m_i = k$. Для этого рассмотрим вертикальную прямую, движущуюся из $-\infty$, и рассмотрим первое ее положение, когда она наталкивается на точку из конфигурации. Пусть m_1 — количество точек конфигурации, которое окажется в этот момент на прямой. Во второй раз на прямой окажется m_2 точек, и т.д.

Легко проверить, что множество точек с данным мультииндексом $(m_1, \dots, m_t)$ — открытая клетка коразмерности $k-t$. Все эти клетки (плюс добавленная точка) образуют клеточное разбиение одноточечной компактификации конфигурационного пространства. В частности, гомологии этой компактификации можно вычислять с помощью соответствующего клеточного комплекса, группы C_i которого порождены всевозможными клетками размерности i, а граничные операторы задаются коэффициентами инцидентности клеток соседних размерностей, т.е. с соседними значениями чисел t.

Такие клетки инцидентны геометрически тогда и только тогда, когда соответствующие им индексы $(m_1, \dots, m_t)$ и $(m'_1, \dots, m'_{t-1})$ почти совпадают, и только для одного значения $i = 1, 2, \dots, t-1$ имеем $m_i + m_{i+1} = m'_i$ (дальше $m_{i+2} = m'_{i+1}$, и т.д.). Нас интересуют коэффициенты инцидентности по модулю 2. Ориентации в таком случае нас не интересуют. Легко видеть, что такой коэффициент инцидентности равен $\binom{m_i+m_{i+1}}{m_i}$.

Задача 1 *Провести вычисление всех гомологий mod 2 для небольших k при помощи указанного клеточного комплекса.*

Эти (и даже, более того, целочисленные) гомологии можно вычислять и с помощью симплициального разрешения дискриминанта $\Sigma_2 \subset P_k^{\mathbf{C}}$. Это симплициальное разрешение является естественно фильтрованным пространством, причем член $F_i \setminus F_{i-1}$ этой фильтрации — расслоение над $B(\mathbf{C}^1, i)$ со слоем $\overset{\circ}{\Delta}{}^{i-1} \times \mathbf{C}^{k-2i}$. При этом

$$E^1_{i,q} = \bar{H}_{i+q}(F_i \setminus F_{i-1}, \mathbf{Z}) = \bar{H}_{i+q-(i-1)-2(k-2i)}(B(\mathbf{C}^1, i), \pm\mathbf{Z}),$$

где $\pm\mathbf{Z}$ — локальная система групп, локально изоморфных $\mathbf{Z}$, но меняющих ориентацию при обходе вдоль пути в базе, задающего нечетную перестановку k точек. Эта группа локальных коэффициентов возникает из-за того, что расслоение симплексов неориентировано и меняет ориентацию в точности когда вершины этих симплексов переставляются нечетным образом. Но для коэффициентов $\mathbf{Z}_2$ это несущественно.

Как и в случае дискриминантов в пространстве вещественных полиномов, спектральная последовательность вырождается в члене E^1 (однако теперь это уже очень непростая теорема), поэтому вычисление группы $H^*(Br(k), \mathbf{Z}_2)$ сводится к вычислению аналогичных групп $H^*(Br(i), \mathbf{Z}_2)$ с $i \leq [k/2]$.

Принцип Смейла–Хирша в этом случае верен только в гомологической формулировке:

Задача 2 *Докажите, что $H^*(Br) \cong H^*(\Omega^2 S^3)$. Почему это утверждение естественно считать проявлением принципа Смейла–Хирша?*

С другой стороны, эти пространства не гомотопически эквивалентны: действительно, $\pi_1(\Omega^2 S^3) = \pi_3(S^3) \simeq \mathbf{Z} \neq Br$.