В. А. Васильев

Топология

Специальный курс, осенний семестр 1997 г.

1 Лекция 5

Мультипликативная структура в когомологической спектральной последовательности $E_r^{p,q}$

В когомологической спектральной последовательности стрелки действуют в противоположном направлении. Они повышают на 1 тотальную размерность.

Расслоение когомологически просто тогда и только тогда, когда оно гомологически просто. В частности, для гомологически простого расслоения $E_2^{p,q} = H^p(B, H^q(F))$.

Для когомологической спектральной последовательности есть и нечто новое — мультипликативная структура. Допустим, что основная группа коэффициентов G является коммутативным кольцом. (Это выполнено во всех наиболее интересных случаях.) В таком случае возникает умножение на члене E_r для любого r. Это умножение обладает следующими свойствами.

1) Биоднородность:

$$\alpha \in E_r^{p,q},\ \beta \in E_r^{p',q'} \Rightarrow \alpha\beta \in E_r^{p+p',q+q'}.$$

2) Кососкоммутативность:

$$\beta\alpha = \alpha\beta(-1)^{p+p',q+q'}.$$

3) Формула Лейбница:

$$\partial^r(\alpha\beta) = (\partial^r\alpha)\beta + (-1)^{p+q}\alpha(\partial^r\beta).$$

4) Наследственность: если известно действие умножения на члене E_{r-1}, то известно и действие умножения на члене E_r. А именно, пусть $a \in E_{r-1}^{p,q}$ и $b \in E_{r-1}^{p',q'}$ — представители классов α и β из $E_r^{p,q}$ и $E_r^{p',q'}$. Тогда элемент $ab \in E_{r-1}^{p+p',q+q'}$ представляет класс $\alpha\beta$.

5) Согласованность с естественным умножением на члене E_2

Для члена E_2 мы знаем, как устроены все его клетки: $E_2^{p,q} = H^p(B, H^q(F))$. Поскольку группа коэффициентов $H^*(F)$ является кольцом, на градуированной группе $H^*(B, H^*(F))$ имеется стандартная мультипликативная структура, причем для любых элементов $\alpha \in H^p(B, H^q(F))$, $\beta \in H^{p'}(B, H^{q'}(F))$, $\alpha\beta \in H^{p+p'}(B, H^{q+q'}(F))$.

Умножение на члене E_2 совпадает с этим естественным умножением в кольце когомологий.

6) Согласованность с умножением в когомологиях пространства расслоения.

Пусть $a \in H^{p+q}(X)$, $b \in H^{p'+q'}(X)$ — два класса когомологий пространства нашего расслоения, имеющие соответственно фильтрации p и p'. Пусть $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ — соответствующие им элементы групп $E_\infty^{p,q}$ $E_\infty^{p',q'}$. Тогда класс ab имеет фильтрацию $p+p'$, причем соответствующий ему класс в клетке $E_\infty^{p+p',q+q'}$ равен $\tilde{a}\tilde{b}$.

Теорема. Для любого гомологически простого расслоения существует и единственна мультипликативная структура на спектральной последовательности, удовлетворяющая всем предыдущим свойствам.

Из этого можно получить довольно много, например следующее утверждение.

Следствие. Если спектральная последовательность гомологически простого расслоения вырождается в члене E_2, то (в случае когомологий с коэффициентами в поле) кольцо когомологий пространства этого расслоения изоморфно кольцу когомологий прямого произведения.

Пример. Напомним, что мы уже вычисляли группу гомологий упорядоченного конфигурационного пространства $\mathcal{F}(\mathbf{R}^n, k)$. Она оказалась изоморфной группе гомологий пространства

$$S^{n-1} \times \bigvee_2 S^{n-1} \times \bigvee_3 S^{n-1} \times \cdots \times \bigvee_{k-1} S^{n-1}. \tag{1}$$

Теорема. Кольцо когомологий упорядоченного конфигурационного пространства с коэффициентами в поле изоморфно кольцу когомологий пространства (1).

Доказательство. Это немедленно вытекает из следствия к предыдущей теореме в случае, когда мы вычисляем когомологии с коэффициентами в любом поле; для коэффициентов $\mathbf{Z}$ нужно воспользоваться дополнительно тем, что группы гомологий и когомологий конфигурационного пространства не имеют кручения.

Теорема. Имеется изоморфизм колец

$$H^*(SU(n), \mathbf{Z}) \cong H^*(S^3 \times S^5 \times \cdots \times S^{2n-1}, \mathbf{Z}).$$

Доказательство. Применим индукцию по n. Рассмотрим следующее расслоение: унитарному реперу сопоставляется его первый вектор. Это расслоение имеет вид

$$SU(n) \xrightarrow{SU(n-1)} S^{2n-1}.$$

Докажем, что $E_2 \equiv E_\infty$. В члене E_2 есть ровно два одинаковых ненулевых столбца, $p = 0$ и $p = 2n-1$, в каждом из которых записаны когомологии $SU(n-1)$, то есть $E_2^{p,q} \simeq H^q(SU(n-1))$. Эти когомологии нам известны из предположения индукции. Единственный нетривиальный дифференциал спектральной последовательности мог бы действовать из первого столбца во второй, то есть иметь вид $\partial^{2n-1} : E_{2n-1}^{0,q} \to E_{2n-1}^{2n-1,q-2n+2}$. Максимальная размерность ненулевого элемента группы $H^*(SU(n-1))$ довольно велика: она равна $3+5+\cdots+2n-3 = n^2-2n$. Поэтому просто из рассмотрения множества ненулевых клеток тривиальность этого дифференциала не вытекает. Чтобы доказать, что он все-таки нулевой, нужно использовать мультипликативную структуру. По предположению индукции, максимальная размерность мультипликативной образующей кольца $H^*(F)$ равна $2n-3$. Действующий на нее дифференциал попадает в клетку $2n-2$; до ненулевого столбца он не дотягивается. Поэтому все мультипликативные образующие отображаются в нуль, а в таком случае из формулы Лейбница следует, что дифференциал ∂^{2n-1} нулевой. Все остальные дифференциалы тоже нулевые. Поэтому когомологии $SU(n)$ такие же, как и у прямого произведения $SU(n-1) \times S^{2n-1}$.

Симплициальное разрешение

Симплициальное разрешение — это непрерывный аналог формулы включения и исключения: количество элементов объединения конечных множеств равно (сумме элементов этих множеств) $-$ (количеству элементов их двукратных пересечений) $+$ (количеству элементов трехкратных пересечений) $- \cdots$ Эта формула возникнет сама собой если мы рассмотрим симплициальное разрешение объединения наших множеств. Оно строится следующим образом. Рассмотрим дизъюнктное объединение данных множеств. Если одна и та же точка принадлежит двум множествам, то соединим отрезком экземпляры этой точки в этих двух множествах. Если точка принадлежит трем множествам, то на полученные три отрезка натянем треугольник, и т.д. В результате получим некоторый набор симплексов, т.е. симплициальный комплекс. У этого симплициального комплекса есть естественная проекция на исходное множество, причем эта проекция является гомотопической эквивалентностью. В частности, эйлеровы характеристики исходного множества и полученного симплициального комплекса совпадают. Это и есть формула включений и исключений.

Та же самая конструкция годится и для не очень плохих многомерных топологических пространств.

Определение. Пусть задан набор пересекающихся достаточно хороших топологических пространств $V_1, \ldots, V_k$ (например, конечных полиэдров или CW-комплексов, причем все их пересечения любой кратности также являются подполиэдрами или CW-подкомплексами). Возьмем пространство $\mathbf{R}^N$ достаточно большой размерности и вложим их в него по отдельности как топологические подпространства. Каждую точку их объединения $V \equiv V_1, \ldots, V_k$ выделим во всех множествах, куда она входит. Если размерность N достаточно велика, то выпуклая оболочка выделенных точек — симплекс, причем разные симплексы попарно не пересекаются. Объединение всех выпуклых оболочек, снабженное топологий, индуцированной из $\mathbf{R}^N$, и есть *симплициальное разрешение.*

У симплициального разрешения есть стандартная проекция на исходное объединение множеств: любой симплекс отображается в точку, из которой он произошел. Эта проекция — гомотопическая эквивалентность, если пространства достаточно хорошие (например, все они — конечные клеточные комплексы, а все их пересечения — подкомплексы). Действительно, прообраз внутренней части каждой клетки — локально тривиальное расслоение, слоем которого служит симплекс. Гомотопическая эквивалентность доказывается последовательным стягиванием симплексов над клетками разной размерности.

Дадим другое, более формальное определение симплициального разрешения, применимое в гораздо более общей ситуации.

Определение. Пусть k — максимальная кратность пересечения данных множеств. Рассмотрим башню дизъюнктных объединений $\bigsqcup V_i$, $\bigsqcup_{i<j}(V_i \times V_j)$, $\bigsqcup_{i<j<m}(V_i \times V_j \times V_m), \ldots, \bigsqcup(V_1 \times \cdots \times V_k)$. На этой башне есть частичный порядок: если есть точка в произведении, то, забывая некоторые множители, получаем точки из предыдущих уровней.

Затем возьмем джойн всех этих множеств:

$$\mathbf{J} = (\bigsqcup V_i) * (\bigsqcup_{i<j} V_i \times V_j) * \ldots * (\bigsqcup V_1 \times \cdots \times V_k). \qquad (2)$$

Его удобно рассматривать как объединение всевозможных симплексов, первая вершина которых принадлежит $\bigsqcup V_i$, вторая — $\bigsqcup_{i<j} V_i \times V_j$, и т.д. Искомое симплициальное разбиение будет построено как некоторое его топологическое подпространство.

Пусть некоторая точка $\bullet \in V$ принадлежит пересечению $V_{i_1} \bigcup V_{i_2} \bigcup \cdots \bigcup V_{i_l}$, но не лежит ни в каком пересечении большего числа множеств. Рассмотрим точку $\bullet^l \in \bigsqcup V_{i_1} \times \cdots \times V_{i_l}$, соответствующую произведению точек $\bullet$ в этих множествах.

Ее *подчиненный комплекс* в джойне (2) — это подкомплекс, состоящий из некоторых $(l-1)!$ штук $(l-1)$-мерных симплексов, занумерованных всевозможными способами последовательного вычеркивания индексов из множества $(i_1, i_2, \ldots, i_l)$. Именно, каждому такому способу соответствует симплекс, одна вершина которого — выбранная точка $\bullet^l$ из произведения $V_{i_1} \bigcup V_{i_2} \bigcup \cdots \bigcup V_{i_l}$, вторая — точка аналогичного произведения $l-1$ множеств (тех же самых, за исключением соответствующего индексу, вычеркнутому первым), полученная из нее очевидной проекцией, и т.д. Объединение всех этих $(l-1)!$ симплексов вновь гомеоморфно $(l-1)$-мерному симплексу, причем его разбиение на эти $(l-1)!$ симплексов и их всевозможные грани гомеоморфно его первому барицентрическому разбиению с центром в точке $\bullet^l$.

Берем объединение всех таких симплексов в джойне, соответствующих всевозможным точкам $\bullet \in V$. Это объединение обладает очевидной проекцией на V, слои которой — симплексы разных размерностей. При некоторых не очень ограничительных условиях на V (например, если V — CW-комплекс, а всевозможные кратные пересечения его подмножеств V_i — его подкомплексы), то эта проекция — гомотопическая эквивалентность; для совсем хороших пространств эта абстрактная конструкция топологически эквивалентна предыдущей наивной конструкцией с вложениями в $\mathbf{R}^N$ и натягиванием выпуклых оболочек.

Техника симплициального разрешения хорошо приспособлена для анализа многих топологических пространств. Простейший но очень поучительный пример — $\mathbf{R}^m$ без некоторого набора плоскостей. Мы уже сталкивались с такими пространствами: именно, все конфигурационные пространства $\mathcal{F}(\mathbf{R}^n, k)$ представимы в таком виде.