В. А. Васильев

Топология

*Специальный курс, осенний семестр 1997 г.*

## Лекция 6

Симплициальное разрешение удобно использовать для вычисления гомологий объединения $V = \bigcup_i V_i$ не очень плохих топологических пространств $V_i$: скажем, когда все пространства $V_i$ и все их кратные пересечения — клеточные подкомплексы в $V$, и всего имеется лишь конечное число $n$ этих множеств: $i = 1, \ldots, n$. Эта конструкция дает пространство, гомотопически эквивалентное исходному. На полученном пространстве нужно ввести удобную фильтрацию и затем посчитать его гомологии с помощью соответствующей спектральной последовательности. Одна из возможных фильтраций устроена следующим образом. Первый член: $F_1 = \coprod_i V_i$ (где $\coprod$ — знак несвязного объединения). Второй член:

$$F_2 = F_1 \bigcup (\text{объединение всех отрезков}) .$$

(Отрезки соответствуют всем точкам двукратного пересечения. При этом каждой точке трехкратного пересечения соответствуют три отрезка, точке 4-кратного пересечения — $\binom{4}{2} = 6$ отрезков, и т.д.). Это множество $F_2$ можно еще описать как

$$F_1 \bigcup_{\phi_2} \left( \coprod_{i<j} (V_i \bigcap V_j) \times [0,1] \right),$$

где $\phi_2 : \coprod_{i<j} (V_i \bigcap V_j) \times \{0,1\} \to F_1$ — отображение, которое любую точку $(z,0) \in (V_i \cap V_j) \times [0,1]$ отображает в точку $z \in V_i$, а точку $(z,1) \in (V_i \cap V_j) \times [0,1]$ — в точку $z \in V_j$. В частности, при этом

$$F_2 \setminus F_1 \simeq \left( \coprod_{i<j} (V_i \bigcap V_j) \times (0,1) \right).$$

Аналогично, третий член устроен так:

$$F_3 = F_2 \bigcup_{\phi_3} \left( \coprod_{i<j<k} (V_i \bigcap V_j \bigcap V_k) \times \Delta^2 \right),$$

где $\Delta^2$ — треугольник, а $\phi_3$ — очевидное отображение

$$\coprod_{i<j<k} (V_i \bigcap V_j \bigcap V_k) \times \partial \Delta^2 \to F_2,$$

и т.д.

Опишем спектральную последовательность, порожденную этой фильтрацией. Обозначим через $\binom{n}{p}$ множество всех подмножеств мощности $p$ в множестве индексов $1,\ldots,n$, нумерующих наши множества $V_i$.

$F_p/F_{p-1}$ — это фактор множества $\coprod_{(i_1<\cdots<i_p)\in\binom{n}{p}} V_{i_1}\bigcap\cdots\bigcap V_{i_p}\times\Delta^{p-1}$ по его подмножеству $\coprod_{(i_1<\cdots<i_p)\in\binom{n}{p}} V_{i_1}\bigcap\cdots\bigcap V_{i_p}\times\partial\Delta^{p-1}$. Поэтому

$$\begin{aligned} E^1_{p,q} &= H_{p+q}\left(\left(\coprod_{L\in\binom{n}{p}}\bigcap_{i\in L}V_i\right)\times\Delta^{p-1}\Big/\left(\coprod_{L\in\binom{n}{p}}\bigcap_{i\in L}V_i\right)\times\partial\Delta^{p-1}\right)= \\ &= \tilde{H}_{q+1}\left(\coprod_{L\in\binom{n}{p}}\bigcap_{i\in L}V_i\right). \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{H}_*$ означает гомологии, приведенные по модулю точки.

Эта спектральная последовательность (Майера — Вьеториса) сходится к гомологиям пересечения.

Однако, она не является единственно возможной спектральной последовательностью, а порождающая ее фильтрация — самой удобной фильтрацией для любых таких наборов пересекающихся множеств $V_i$. Хорошая фильтрация — это фильтрация, для которой спектральная последовательность вырождается как можно раньше.

Например, пусть $\{V_i\}$ — набор аффинных плоскостей каких-то размерностей в пространстве $\mathbf{R}^n$. (В англоязычной литературе такой объект называется plane arrangement, а по-русски эквивалентного короткого термина не существует.) Пусть нам нужно посчитать когомологии их дополнения $\mathbf{R}^n\setminus V$ или, что в силу двойственности Александера то же самое, гомологии Бореля–Мура $\bar{H}_*(V)$ самого множества $V$.

(Напомним, что так называются гомологии одноточечной компактификации множества $V$, приведенные по модулю добавленной точки, $\bar{H}_*(V)\equiv H_*(\bar{V},\cdot)$. Для единообразия и строгости заметим также, что одноточечной компактификацией *компактного* пространства называется не оно само, как можно было бы ожидать, а оно само с добавленной отдельной точкой. Это уточнение полезно, если некоторые из плоскостей $V_i$ — точки.)

В этом случае на пространстве симплициального разрешения наиболее удобной является не описанная выше фильтрация по размерности симплексов, а некоторая другая, которую мы опишем на следующей лекции.

## Лекция 7

При вычислении гомологий объединения топологических пространств симплициальное разрешение полезно делать всегда, а о выборе правильной фильтрации на пространстве разрешения нужно думать. Фильтрация Майера — Вьеториса не всегда бывает удобна. Пусть, например,

$$\mathbf{R}^N\supset V=V_1\bigcup V_2\bigcup\ldots\bigcup V_m$$

Рис. 1: Пример симплициального разрешения

Рис. 2: Другой пример

— набор аффинных плоскостей разных размерностей. Требуется вычислить гомологии или когомологии $\mathbf{R}^N \setminus V$. По двойственности Александера

$$H^i(\mathbf{R}^N \setminus V) \cong \bar{H}_{N-i+1}(V) \equiv \tilde{H}_{N-i+1}(\bar{V}) \cong \tilde{H}_{N-i+1}(\bar{V}')$$

(здесь $\bar{V}$ — одноточечная компактификация пространства $V$, а $V'$ — его симплициальное разрешение). В этом случае фильтрация Майера — Вьеториса дает плохо сходящуюся спектральную последовательность. Более удобна другая фильтрация.

Будем называть *стратом* множества $V$ пересечение любого набора исходных плоскостей $V_1, \dots, V_m$. В частности, один страт может лежать в другом. Для любого подмножества $I \subset \{1, \dots, m\}$ обозначим через $V_I$ страт $\bigcap_{i \in I} V_i$. Вообще говоря, страт может быть несколькими способами представлен в виде такого пересечения: например, центральная точка на рис. 2 слева имеет четыре таких представления: $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_3 = V_2 \cap V_3 = V_1 \cap V_2 \cap V_3$. Однако мы всегда будем использовать каноническое представление страта $L = V_I$, где $I = I(L)$ — множество *всех* $i$ таких, что $V_i \supset L$.

Когда мы перейдем к симплициальному разрешению, над каждым стратом "повиснет" его полный прообраз. Он устроен довольно нерегулярно: прообразы разных точек имеют разную размерность. Более правильное подмножество пространства разрешения, связанное с нашим стратом — его *собственный прообраз*. Собственный прообраз страта $L = V_I$, где $I = \{i | V_i \supset L\}$ и $L = \bigcup_{i \in I} V_i$, строится следующим образом. Для неособой (т.е. не лежащей в других, более мелких, стратах) точки страта $L$ полный прообраз является симплексом $\Delta(L)$, множество вершин которого находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $I = I(L)$. Рассмотрим в $V'$ объединение полных прообразов всех неособых (типичных) точек страта. Его замыкание в $V'$ и называется собственным прообразом страта. Оно обладает очевидной проекцией на страт, при этом прообраз над особой точкой страта — это некоторая грань ее полного прообраза в $V'$.

Собственный прообраз страта естественно гомеоморфен его прямому произведению на симплекс $\Delta(L)$.

**Задача 1** *Рассмотрим три координатные плоскости в трехмерном пространстве. Нарисуйте симплициальное разрешение для этих трех множеств и найдите собственные прообразы стратов.*

Удобная фильтрация пространства $V'$ в случае когда $V$ — набор аффинных плоскостей — это фильтрация собственными прообразами стратов фиксированной коразмерности. А именно:

$$\begin{aligned} F_1 &= \text{объединение собственных прообразов стратов размерности } n-1 \\ F_2 &= F_1 \bigcup \{\text{объединение собственных прообразов стратов размерности } n-2\} \\ &\ldots \end{aligned}$$

Для нашего симплициального разрешения проекция — собственное отображение, поэтому оно продолжается до непрерывного отображения одноточечной компактификации симплициального разрешения на компактификацию исходного набора плоскостей, и эта проекция вновь является гомотопической эквивалентностью. Поэтому достаточно посчитать гомологии пространства $\bar{V}'$ — компактификации разрешения. Но наша фильтрация $\{F_i\}$ на пространстве разрешения индуцирует фильтрацию $\{\bar{F}_i\}$ и на его компактификации. Именно, положим $\bar{F}_0 = \{$ добавленная при компактификации точка$\}$, а при $i \geq 1$ $\bar{F}_i = F_i \bigcup \bar{F}_0$.

Найдем член $E^1$ спектральной последовательности, сходящейся к гомологиям пространства $\bar{V}'$ и порожденной этой фильтрацией.

По определению,

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(\bar{F}_p, \bar{F}_{p-1}) \equiv \bar{H}_{p+q}(\bar{F}_p \setminus \bar{F}_{p-1}) \equiv \bar{H}_{p+q}(F_p \setminus F_{p-1}).$$

Вычислим эту группу. $F_p \setminus F_{p-1}$ — это несвязное объединение по всем стратам $L = V_I$ размерности $N - p$ множеств вида

$$(\textit{собственный прообраз } V'_I \textit{ страта } V_I) \setminus (V'_I \cap F_{p-1}).$$

Но собственный прообраз $V'_I$ канонически гомеоморфен $V_I \times \Delta_I$. А его пересечение с $F_{p-1}$ при этом гомеоморфизме переходит в множество $V_I \times M_I$, где $M_I$ — некоторый подкомплекс симплекса $\Delta_I$ (то есть объединение нескольких его граней). Опишем этот подкомплекс.

Вершины симплекса $\Delta_I$ соответствуют плоскостям, содержащим страт $V_I$. Любая его грань описывается набором $J \subset I$ своих вершин, то есть некоторым подмножеством множества $I$ всех таких плоскостей. В частности, для любой такой грани плоскость $\cap_{i \in J} V_i$ содержит $V_I$. Имеется две возможности: либо эти две плоскости совпадают, либо плоскость $\cap_{i \in J} V_i$ строго больше чем страт $V_I$. В этом последнем случае грань, описываемая набором $J$, называется *маргинальной.* Объединение всех маргинальных граней симплекса $\Delta_I$ обозначим через $M_I$. Тогда

$$(V'_I \bigcap F_{p-1}) \approx V_I \times M_I.$$

Таким образом,
$$F_p \setminus F_{p-1} \approx \coprod \left(V_I \times (\Delta_I \setminus M_I)\right),$$
где объединение берется по всем стратам $V_I$ коразмерности $p$.

Окончательно получаем, что

$$\begin{aligned} E^1_{p,q} &\cong \bar{H}_{p+q}(F_p \setminus F_{p-1}) \\ &\cong \bar{H}_{p+q}\left(\coprod (V_I \times (\Delta_I \setminus M_I))\right) \\ &\cong \bigoplus \bar{H}_{p+q-(n-p)}(\Delta_I \setminus M_I), \end{aligned}$$

где объединение и сумма берутся по всем стратам $V_I$ коразмерности $p$; последний изоморфизм получается из формулы Кюннета и из того, что страт $V_I$ — линейное пространство размерности $n-p$.

**Теорема 1 (Горески — МакФерсон)** *Наша спектральная последовательность вырождается в первом члене, т.е.* $E^\infty_{p,q} = E^1_{p,q}$.

(Собственно говоря, теоремой и формулой Горески–МакФерсона называется выражение для когомологий дополнения к набору плоскостей, вытекающее из этого утверждения и предыдущей формулы с помощью двойственности Александера.)

В частности,
$$\tilde{H}_i(\bar{V}) \cong \bigoplus_{p+q=i} E^1_{p,q},$$
т.е. гомологии дополнения к набору плоскостей выражаются через комбинаторные свойства набора плоскостей. Для каждого набора плоскостей достаточно знать лишь размерность их пересечения. Аналогичное утверждение неверно, например, для фундаментальной группы и для кольцевой структуры когомологий дополнения к набору плоскостей.

Обобщение теоремы Горески — Макферсона:

**Теорема 2** *Пространство* $\bar{V}$ *гомотопически эквивалентно букету*
$$\bigvee_{\textit{все страты}\, V_I} \left(\Sigma^{\dim V_I}(\Delta_I / M_I)\right),$$
*где* $\Sigma^k$ *— обозначение для* $k$*-кратной надстройки.*

Конечно, теорема Горески–МакФерсона сразу следует из этой с помощью двойственности Александера.

**Двойственность Спеньера — Уайтхеда**

Определение. Два клеточных комплекса $A$ и $B$ двойственны по Спеньеру — Уайтхеду, если они имеют *гомотопический тип* взаимно дополнительных топологических подпространств некоторой сферы $S^n$.

(Это означает следующее: во-первых, $A$ и $B$ двойственны по Спеньеру — Уайтхеду, если можно вложить $A$ в $S^n$ как клеточный подкомплекс некоторого клеточного разбиения $S^n$ так, что $S^n \setminus A$ гомеоморфно $B$. Во-вторых, если пространство $A$ гомотопически эквивалентно $A'$, пространство $B$ гомотопически эквивалентно $B'$, а $A$ и $B$ двойственны по Спеньеру — Уайтхеду, то $A'$ и $B'$ тоже двойственны по Спеньеру — Уайтхеду.)

Например, дополнение $\mathbf{R}^N \setminus V$ к набору плоскостей и одноточечная компактификация $\bar{V}$ этого набора двойственны по Спеньеру–Уайтхеду.

Группы гомологий и когомологий двойственных по Спеньеру–Уайтхеду пространств связаны между собой двойственностью Александера.

Определение. Пространства $A$ и $A'$ называют *стабильно гомотопически эквивалентными* (или, что то же самое, имеющими один и тот же стабильный гомотопический тип), если пространства $\Sigma^n A$ и $\Sigma^n A'$ гомотопически эквиваленты при некотором натуральном $n$.

**Предложение 1** *Двойственность Спеньера — Уайтхеда является инволюцией на множестве стабильных гомотопических типов.*

Это означает следующее: если мы знаем класс стабильной гомотопической эквивалентности некоторого пространства, то такой класс любого $n$-двойственного к нему пространства этим также однозначно определен. Отсюда следует, в частности, что все *экстраординарные группы гомологий и когомологий* любого пространства полностью определяются любым его двойственным по Спеньеру–Уайтхеду пространством. Для обычных групп гомологий это вытекает из теоремы двойственности Александера; другие такие группы включают группы *бордизмов* и *кобордизмов*, *стабильные гомотопические группы*, *$K$-функтор* топологического пространства и некоторые другие; ни одна из них в нашем курсе не встретится, во всяком случае явно.

В частности, стабильный гомотопический тип пространства $\bar{V}$ полностью определяет стабильный гомотопический тип $\mathbf{R}^N \setminus V$.

**Доказательство теоремы 2.**

**Стратифицированная теория Морса**

Обычная теория Морса, изучавшаяся в прошлом семестре, вычисляет гомологии гладких многообразий: на многообразии вводится гладкая функция общего положения и рассматриваются последовательные перестройки множеств $f^{-1}(-\infty, t]$ по мере роста $t$. Стратифицированная теория Морса занимается тем же самым в случае функций на гораздо более сложных множествах. В общем виде мы рассмотрим эту технологию позднее, а сейчас используем в простейшем случае, когда исследуемое множество — набор аффинных плоскостей в $\mathbf{R}^N$, а все *страты* — плоскости. Введем в $\mathbf{R}^N$ квадратичную функцию $f = x_1^2 + \cdots + x_N^2$, выбрав аффинную систему координат $x_1, \ldots, x_N$ *общего положения,* то есть удовлетворяющую следующим двум условиям.

Во-первых, начало координат не лежит на рассматриваемых плоскостях.

Ограничение $f$ на любой страт имеет ровно одну критическую точку — точку минимума; значение функции $f$ в этой точке называется критическим значением и обозначается $f_I$. Второе условие состоит в том, что все числа $f_I$, соответствующие разным стратам, различны.

Для любого $t \in \mathbf{R}$ рассмотрим множество

$$V_t = V \bigcap \{x | f(x) \geq t\},$$

то есть пересечение $V$ с дополнением к шару радиуса $\sqrt{t}$, и будем следить за перестройками пар $(V, V_t)$.

Лемма. 1) Если $t$ достаточно мало (т.е. $t$ близко к $+0$), то $(V, V_t) = (V, V)$, в частности $V/V \sim$ точка.

2) Если $t$ достаточно велико, то $V/V_t$ гомотопически эквивалентно $\bar{V}$.

3) Если $t < s$ и между $t$ и $s$ нет критических значений функции $f$ (т.е. критических значений ограничений $f$ на страты), то $V/V_s$ гомотопически эквивалентно $V/V_t$; эта гомотопическая эквивалентность задается стягиванием всего шарового слоя $V \cap f^{-1}([t, s])$ в точку.

4) Если между $t$ и $s$ есть ровно одно критическое значение функции $f$, которое $f$ принимает на страте $V_I$, то $V/V_s$ гомотопически эквивалентно

$$(V/V_t) \bigvee \Sigma^{\dim V_I} (\Delta_I / M_I).$$

Первые три утверждения почти очевидны, а последнее будет доказано на следующей лекции.

Теорема 2 немедленно вытекает из этой леммы индукцией по последовательным переходам через критические значения.