В. А. Васильев

Топология

Специальный курс, осенний семестр 1997 г.

1 Лекция 8

На прошлой лекции мы вычисляли гомологии дополнения плоскостей, или, что то же самое в силу двойственности Александера, замкнутые гомологии самого объединения плоскостей. Замкнутыми гомологиями называют гомологии одноточечной компактификации, приведенные по модулю добавляемой точки. По-другому их можно определить следующим образом. Раньше, определяя гомологии, мы рассматривали конечные суммы сингулярных симплексов. Но можно рассматривать и локально конечные суммы сингулярных симплексов и строить гомологии с их помощью. Для компактных топологических пространств мы получим в точности те же самые гомологии. Однако в некомпактном случае это определение полезнее, поскольку позволяет определять и такие гомологии с коэффициентами в произвольной локальной системе. Точнее, локально конечной цепью с коэффициентами в локальной системе называется произвольная счетная формальная сумма сингулярных симплексов пространства соответствующего накрытия, такая что ее проекция в базу является там локально конечной цепью. Такие цепи очевидным образом определяют комплекс, его гомологии и называются замкнутыми гомологиями. В случае постоянных локальных систем, то есть попросту гомологий с коэффициентами в некоторой группе, и не очень плохих топологических пространств это определение замкнутых гомологий совпадает с дававшимся ранее. Еще их называют так: *гомологии Бореля–Мура* и обозначают H_*^{lf} или $\bar{H}_*$.

Задача 1 *Вычислить* $\bar{H}_*(\mathbf{R}^1)$ *и* $\bar{H}_*(\mathbf{R}^n)$.

Задача 2 *Вычислить* $\bar{H}_*(X \times \mathbf{R}^n)$ *если известны* $\bar{H}_*(X)$.

У нас был набор аффинных плоскостей $V = \bigcup V_i$. Мы вычисляли группы гомологий комплекса локально конечных цепей для V с помощью фильтрации его симплициального разрешения по коразмерностям стратов. Напомним определение страта. Пусть $i \in (1, \dots, k)$, $I \subset (1, \dots, k)$. Тогда множество $V_I = \bigcap_{i \in I} V_i$ называют стратом. Для каждого страта определялся его собственный прообраз в симплициальном разрешении V' пространства V. Возрастающая фильтрация $\bar{F}_0 \subset \bar{F}_1 \subset \cdots$ одноточечной компактификации симплициального разрешения определялась так: $\bar{F}_0$ — это добавленная точка, а $\bar{F}_i$ получается добавлением объединения собственных прообразов всех стратов коразмерности $1, 2, \dots, i$.

Мы рассматривали спектральную последовательность, сходящуюся к $\bar{H}_*(V') \cong \bar{H}_*(V) \equiv \tilde{H}_*(\bar{V})$, порожденную этой фильтрацией, то есть с первым членом $E^1_{p,q} = \bar{H}_{p+q}(F_p \setminus F_{p-1}) \cong \tilde{H}_{p+q}(\bar{F}_p/\bar{F}_{p-1})$.

Мы начали доказывать, что одноточечная компактификация $\bar{V}$ пространства V гомотопически эквивалентна некоторому букету. Для этого для любых $t \in (0, +\infty)$ мы рассмотрели множество

$$V_t = V \bigcap \{x | f(x) \geq t\},$$

где f — квадратичная функция общего положения, и сформулировали следующие свойства:

1) Если $t \approx +0$, то $V/V_t \sim *$.

2) Если $t \approx +\infty$, то $V/V_t \sim \bar{V}$.

3) Если на отрезке $[t, s]$ нет критических значений функции f, то V/V_t гомотопически эквивалентно V/V_s. При этом гомотопическая эквивалентность получается дополнительной факторизацией.

4) Если на отрезке $[t, s]$ есть ровно одно критическое значение функции f, которое f принимает на страте V_I, то

$$V/V_s \sim (V/V_t) \bigvee \Sigma^{\dim V_I}(\Delta_I/M_I). \tag{$*$}$$

Аналогично, можно для любого t определить подмножество V_t' пространства разрешения V' как полный прообраз множества V_t при канонической проекции $V' \to V$. Для любого t имеется гомотопическая эквивалентность $V'/V_t' \to V/V_t$, поэтому мы можем (и будем) доказывать эти утверждения, заменяя все пространства V/V_t и V/V_s соответственно на V'/V_t' и V'/V_s'.

Первые три утверждения достаточно очевидны. Мы будем доказывать лишь четвертое утверждение — основной шаг индукции.

Напомним операцию приклеивания по отображению. Пусть A и B — некоторые топологические пространства, $C \subset A$ и $\varphi : C \to B$ — непрерывное отображение. Пространство $B \bigcup_\varphi A$ строится следующим образом: мы берем несвязное объединение B и A и каждую точку $c \in C$ отождествляем с точкой $\varphi(c) \in B$.

Тривиальный пример: если A и B — пересекающиеся топологические пространства, то их объединение — это $B \bigcup_\varphi A$, где φ — тождественное вложение $A \bigcap B \to B$. Иными словами,

$$A \bigcup B = B \bigcup\nolimits_{\mathrm{Id}\,(A \bigcap B)} A. \tag{1}$$

Операция приклеивания обладает приятным свойством гомотопической инвариантности. Пусть $f : B \to B'$ — непрерывное отображение. Тогда можно определить $B' \bigcup_{f \circ \varphi} A$.

Теорема 1 *Любая гомотопическая эквивалентность $f : B \to B'$ определяет гомотопическую эквивалентность*

$$B \bigcup\nolimits_\varphi A \to B' \bigcup\nolimits_{f \circ \varphi} A. \tag{2}$$

Итак, мы доказываем, что

$$V'/V_s' \sim (V'/V_t') \bigvee \Sigma^{\dim V_I}(\Delta_I/M_I). \tag{3}$$

В нашем случае V'/V_s' — объединение двух подмножеств. А именно, рассмотрим тот самый страт V_I, для которого критическое значение f_I лежит между t и s, т.е. этот страт еще пересекается с $V \backslash V_s$, но уже не пересекается с $V \backslash V_t$. Пусть V_I' — собственный прообраз этого страта, а $\tilde{V}'$ — объединение собственных прообразов всех стратов, которые пересекаются и с меньшим шаром V_t. Тогда

$$V'/V_s' = V_I'/(V_I' \bigcap V_s') \bigcup (\tilde{V}'/\tilde{V}_s'). \tag{4}$$

Но $V'_I \simeq V_I \times \Delta_I$ и
$$V'_I \bigcap V'_s \simeq (V_I \bigcap (f^{-1}([s,+\infty)) \times \Delta_I,$$
поэтому
$$V'_I/(V'_I \bigcap V'_s) \simeq (D^{\dim V_I}/S^{\dim V_I - 1}) \times \Delta_I. \tag{5}$$

С другой стороны, $(\tilde{V}'/\tilde{V}'_s)$ гомотопически эквивалентно (и даже гомеоморфно) (V'/V'_t); эта гомотопическая эквивалентность
$$\psi : (\tilde{V}'/\tilde{V}'_s) \to (V'/V'_t) \tag{6}$$
задается дополнительной факторизацией по прообразу шарового слоя $V_t \setminus V_s$.

Подытожим сказанное. Мы имеем равенство (4). Пользуясь тавтологией (1), рассмотрим его правую часть как приклеивание
$$(\tilde{V}'/\tilde{V}'_s) \bigcup\nolimits_{\mathrm{Id}} (V'_I/(V'_I \bigcap V'_s)), \tag{7}$$
где Id — тождественное вложение их пересечения. Это пересечение, рассматриваемое как подмножество в $V'_I/(V'_I \bigcap V'_s)$, при гомеоморфизме (5) по построению переходит в
$$(D^{\dim V_I}/S^{\dim V_I - 1}) \times M_I.$$

Гомотопическая эквивалентность (6) в силу теоремы 1 продолжается до гомотопической эквивалентности
$$(V'/V'_s) \simeq (V'/V'_t) \bigcup\nolimits_{\psi \circ \mathrm{Id}} (D^{\dim V_I}/S^{\dim V_I - 1}) \times \Delta_I,$$
где $\psi \circ \mathrm{Id}$ — некоторое отображение подмножества
$$(D^{\dim V_I}/S^{\dim V_I - 1}) \times M_I \subset (D^{\dim V_I}/S^{\dim V_I - 1}) \times \Delta_I$$
в V'/V'_t.

Остается проверить, что это отображение гомотопно отображению в точку. Но это следует из того, что весь страт V_I лежит в множестве V_t. В итоге получаем, что пространство V'/V'_s гомотопически эквивалентно пространству V'/V'_t, к которому приклеено $(D^{\dim V_I}/S^{\dim V_I - 1}) \times \Delta_I$ по отображению, переводящему $(D^{\dim V_I}/S^{\dim V_I - 1}) \times M_I$ в точку. Это в точности и есть букет из правой части формулы (3).

Когомологии пространств многочленов без многократных корней

Обозначим через P_d пространство полиномов вида
$$x^d + a_1 x^{d-1} + \cdots + a_{d-1}x + a_d, \quad a_i \in \mathbf{R}. \tag{8}$$

Это пространство естественно гомеоморфно $\mathbf{R}^d$. Пусть $k \le d$. Рассмотрим множество $\Sigma_k \subset P_d$, состоящее из многочленов, имеющих хотя бы один корень кратности не менее k. Назовем это множество *дискриминантом.*

Рис. 1: Дискриминанты Σ_2' при $d = 3$ и 4

Рис. 2: Мультфильм для дискриминанта $\Sigma_2' \subset P_4'$

Множество Σ_k гомеоморфно (и даже объемлемо диффеоморфно) множеству вида $\Sigma_k' \times \mathbf{R}^1$. А именно, имеется диффеоморфизм $P_d \to \mathbf{R}^{d-1} \times \mathbf{R}$, при котором Σ_k отображается в $\Sigma_k' \times \mathbf{R}^1$, где Σ_k' — некоторое подмножество в $\mathbf{R}^{d-1}$. Этот диффеоморфизм определяется так. На P_d свободно действует однопараметрическая группа сдвигов $T_t : p(x) \mapsto p(x-t)$, $t \in \mathbf{R}^1$. P_d расслаивается на орбиты этого действия, диффеоморфные $\mathbf{R}^1$. Факторпространство по этому действию (то есть пространство орбит, снабженное фактортопологией) диффеоморфно $\mathbf{R}^{d-1}$. Его можно реализовать, например, как плоскость $P_d' = \{x^d + a_2 x^{d-2} + \cdots + a_{d-1}x + a_d\}$; каждая орбита пересекает эту плоскость ровно один раз.

Пример 1 *Пусть $d = 3$, $k = 2$. Рассмотрим $\Sigma_k' = \Sigma_k \bigcap P_d'$, где $P_d' = \{x^3 + ax + b\}$. Запишите уравнение для Σ_k' в координатах a и b. Это множество изображено на рис. 1 слева.*

Пример 2 *(Ласточкин хвост) Запишите аналогичное уравнение для Σ_k' в случае $d = 4$, $k = 2$. Стандартное изображение этого множества см. на рис. 1 справа, однако представить его глядя на рисунок не очень просто. Для того чтобы яснее его изобразить, приведем его "мультфильм", то есть последовательность его сечений четырьмя параллельными плоскостями в $\mathbf{R}^3$, идущими от заднего плана на рис. 1 к зрителю. См. рис. 2.*

Как видим на этих рисунках, дискриминант не является гладким подмногообразием в P_d : он имеет особые точки, соответствующие полиномам, имеющим либо корень кратности, большей чем k, либо несколько корней кратности k. Например, дискриминант $\Sigma_2' \subset P_4'$ имеет особенности трех различных типов. Одна, самая особая, представлена единственной центральной точкой на правом рис. 1: она соответствует полиному с четырехкратным корнем. К ней стягиваются две линии, соответствующие полиномам с трехкратными корнями (вблизи этих линий ласточкин хвост имеет "ребро возврата", то есть диффеоморфен прямому произведению прямой $\mathbf{R}^1$ на полукубическую параболу, изображенную на левом рис. 1), и еще одна линия трансверсального самопересечения дискриминанта, состоящая из полиномов с двумя двукратными корнями (в пространстве P_4' они представлены полиномами вида $(x-\alpha)^2(x+\alpha)^2$, $\alpha > 0$).

Займемся вычислением когомологий $H^*(P_d \setminus \Sigma_k) = \bar{H}_*(\Sigma_k)$. Для этого сначала построим симлициальное разрешение множества Σ_k. Это делается сложнее, чем в случае наборов плоскостей или произвольных пересекающихся множеств, потому что теперь возникают *самопересечения* одной и той же неприводимой компоненты разрешаемого множества. Ранее первый шаг заключался в том, чтобы взять плоскости по отдельности. Здесь надо взять *тавтологическую нормализацию* дискриминанта. Эта операция состоит в устранении кванторов.

Напомним, что

$$\Sigma_k = \{p \in P_d | \exists x \in \mathbf{R} : p \,\text{в точке}\, x \,\text{имеет корень кратности} \geq k\}.$$

Положим

$$\Sigma_k' = \{(p,x) \in P_d \times \mathbf{R} | p \,\text{в точке}\, x \,\text{имеет корень кратности} \geq k\}.$$

Задача 3 *Докажите, что Σ_k' диффеоморфно $\mathbf{R}^{d-k+1}$.*

Указание. Последние k коэффициентов выражаются через x и предыдущие коэффициенты с помощью уравнений $p(x) = 0$, $p'(x) = 0, \ldots, p^{(k-1)}(x) = 0$.

Рассмотрим проекцию $\Sigma_k' \to \Sigma_k : (p,x) \mapsto p$. Это — отображение *на,* но вообще говоря не гомеоморфизм. Для того, чтобы все же получить пространство, гомотопически эквивалентное исходному дискриминанту, нужно вклеить отрезки, треугольники, и т.д., как положено в методе симплициальных разрешений. Рассмотрим например случай $d = 4, k = 2$. У ласточкиного хвоста[1] Σ_2' есть линия двойных точек пересечения и нет тройных точек пересечения. Рассмотрим прообраз этой линии в Σ_2'. Это будет гладкая линия, диффеоморфная $\mathbf{R}^1$. На ней есть инволюция $(p, x_1) \leftrightarrow (p, x_2)$. Действительно, линия самопересечения дискриминанта состоит из полиномов, имеющих два разных корня кратности 2. Любой точке ее прообраза, то есть паре (полином p, один из его двойных корней) сопоставляется пара (тот же полином, другой его двукратный корень). Соединяем отрезками пары этих точек и добавляем эти отрезки к множеству Σ_2'. В результате получаем топологическое пространство, для которого отображение проекции продолжается до гомотопической эквивалентности одноточечных компактификаций.

В общем случае — для произвольных d и k — сначала тоже делаем тавтологическую нормализацию. При этом над каждой точкой в Σ_k, соответствующей полиному, окажется столько точек прообраза, сколько у этого полинома геометрически различных k-кратных корней. Затем для всех полиномов, имеющих более одного k-кратного корня, проводим отрезки (их будет $\binom{r}{2}$, где r – число k-кратных корней), затем, если $r \geq 3$, то вклеиваем еще и треугольники, и т.п. Пока, правда, не очень понятно, где лежит полученное пространство, т.е. как можно заклеивать без самопересечений отрезками, треугольниками, и т.д.

[1] Все наши процедуры можно выполнять и над пространствами Σ_k'