В. А. Васильев

Топология

Специальный курс, осенний семестр 1997 г.

1 Лекция 9

Пусть $P_d = \{x^d + a_1x^{d-1} + \cdots + a_{d-1}x + a_d | a_i \in \mathbf{R}\}$ и $k \leq d$. Как мы уже говорили, множество $\Sigma_k \subset P_d$, состоящее из многочленов, имеющих хотя бы один корень кратности не менее k, называют *дискриминантом.* Наша задача состоит в том, чтобы вычислить когомологии

$$H^i(P_d \setminus \Sigma_k) \sim \tilde{H}_{d-i-1}(\bar{\Sigma}_k).$$

В окрестности особой точки поверхности Σ_k, в которой есть корень кратности строго больше k но меньше $2k$, ничего плохого (с топологической точки зрения) не происходит — окрестность гомеоморфна диску. А вот в тех точках, где есть два корня, возникают самопересечения.

Для вычисления когомологий мы применяем вариант симплициального разрешения. Первый шаг — тавтологическая нормализация множества Σ_k. Дальше прообразы точек самопересечения нужно соединять отрезками, отрезки заклеивать симплексами, и т.д. Возникает вопрос — как это сделать без самопересечений? Ведь наша цель — получить пространство, гомотопически эквивалентное исходному, причем гомотопическая эквивалентность должна сохраняться даже после перехода к одноточечным компактификациям. Давайте строго обоснуем возможность построения требуемого пространства.

Пусть $\mathbf{R}^1$ — пространство аргументов. Возьмем его вложение общего положения $\varphi : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^N$, где $N > d/k$. Под вложением общего положения мы здесь подразумеваем такое вложение, что образы любых $[d/k]$ различных точек $x_1, \ldots, x_{[d/k]} \in \mathbf{R}^1$ аффинно независимы. (Через точки $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{[d/k]}) \in \mathbf{R}^N$ всегда проходит аффинная плоскость размерности $[d/k] - 1$; мы требуем, чтобы ни для какого набора таких точек размерность наименьшей содержащей их аффинной плоскости не была бы меньше.) Легко проверить, что отображение $\varphi(x) = (x, x^2, x^3, \ldots, x^{[d/k]})$ является вложением общего положения в этом смысле.

Пусть $f \in \Sigma_k \subset P_d$. Построим симплекс $\tilde{\Delta}(f) \subset \mathbf{R}^N$ следующим образом. Пусть $x_1(f), \ldots, x_t(f)$ — все геометрически различные k-кратные корни многочлена f (ясно, что $t \leq [d/k]$). Рассмотрим точки $\varphi(x_1(f)), \ldots, \varphi(x_t(f))$. Тогда $\tilde{\Delta}(f) \subset \mathbf{R}^N$ — симплекс с вершинами в этих точках.

Симплициальное разрешение мы строим как некоторое подмножество в $P_d \times \mathbf{R}^N$, поэтому вместо симплекса $\tilde{\Delta}(f)$ мы возьмем симплекс $\Delta(f) = f \times \tilde{\Delta}(f) \subset P_d \times \mathbf{R}^N$.

Рассмотрим множество $\sigma = \bigcup_{f \in \Sigma_k} \Delta(f)$. Проекция σ на Σ_k — собственное отображение; его прообраз над любой точкой — симплекс некоторой размерности. Оно продолжается до отображения одноточечных компактификаций.

Мы вычисляем $\bar{H}_*(\sigma)$. Эту группу вычислять уже удобно, потому что на σ есть естественная фильтрация по размерностям симплексов:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \{\text{тавтологическая нормализация}\} = \\
&= \{\text{объединение всех симплексов размерности } 0\}; \\
\sigma_2 &= \{\text{объединение всех симплексов размерности } 0 \text{ и } 1\}; \\
\sigma_3 &= \{\text{объединение всех симплексов размерности } 0,\ 1 \text{ и } 2\}; \\
&\dots \\
\sigma_{[d/k]} &= \sigma.
\end{aligned}$$

Остается посчитать замкнутые гомологии при помощи спектральной последовательности, порожденной этой фильтрацией: $E^1_{p,q} = \bar{H}_{p+q}(\sigma_p \setminus \sigma_{p-1})$.

Множество σ_p состоит из тех симплексов, у которых не более p вершин, а множество σ_{p-1} состоит из тех симплексов, у которых строго меньше p вершин. Поэтому их разность состоит в точности из открытых $(p-1)$-мерных симплексов. Остается учесть, сколько всего будет этих симплексов. Их множество устроено достаточно просто. Имеется локально тривиальное расслоение

$$\sigma_p \setminus \sigma_{p-1} \to B(\mathbf{R}^1, p) \tag{1}$$

со слоем $\mathbf{R}^{d-pk} \times \overset{\circ}{\Delta}{}^{p-1} \subset P_d \times \mathbf{R}^N$ (здесь $B(\mathbf{R}^1, p)$ — конфигурационное пространство p различных точек на прямой, $\overset{\circ}{\Delta}{}^{p-1}$ — открытый симплекс). Любая точка $z \in \sigma_p \setminus \sigma_{p-1} \subset P_d \times \mathbf{R}^N$ имеет вид $f \times s$ где s — внутренняя точка некоторой $(p-1)$-мерной грани симплекса $\tilde{\Delta}(f)$. Вершины этой грани — это некоторые точки вида $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_p)$, где точки $x_1, \dots, x_p$ однозначно определены этим симплексом, а следовательно и точкой z. Итак, мы любой точке $z \in \sigma_p \setminus \sigma_{p-1}$ поставили в соответствие элемент пространства $B(\mathbf{R}^1, p)$, то есть построили отображение (1).

Полный прообраз точки $(x_1, \dots, x_p) \in B(\mathbf{R}^1, p)$ будет прямым произведением евклидова пространства на симплекс.

В самом деле, этот прообраз (лежащий, конечно, в $P_d \times \mathbf{R}^N$), является произведением открытого симплекса в $\mathbf{R}^N$, натянутого на точки $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_p)$, и подпространства в P_d, состоящего из многочленов, имеющих в этих точках $x_1, \dots, x_p$ корни кратности $\geq k$. Очевидно, последнее множество выделяется pk независимыми линейными условиями, то есть является аффинным подпространством в P_d размерности $d - pk$.

Задача 1 *Проверить, что конфигурационное пространство $B(\mathbf{R}^1, p)$ гомеоморфно открытой клетке размерности p.*

В итоге получаем, что $\sigma_p \setminus \sigma_{p-1}$ — клетка размерности

$$p + (p-1) + (d - kp) = d - p(k-2) - 1.$$

Следовательно,

$$E^1_{p,q} = \bar{H}_{p+q}(\sigma_p \setminus \sigma_{p-1}) = \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{если } p+q = d - p(k-2) - 1 \text{ и } p \leq [d/k]; \\ 0, & \text{если } p+q \neq d - p(k-2) - 1. \end{cases}$$

Таким образом, для каждого p есть самое большее одно значение q, для которого $E^1_{p,q} \neq 0$ $(= \mathbf{Z})$.

Если $p > [d/k]$, то $E^1_{p,q} = 0$.

При $k \geq 2$ спектральная последовательность вырождается в первом же члене. Поэтому

$$\bar{H}_i(\sigma) = \bigoplus_{p+q=i} E^1_{p,q}.$$

Нетривиальные свободные образующие есть в размерностях $i = d - p(k-2) - 1$, $p = 1, 2, \ldots, [d/k]$.

Основная наша цель — вычисление когомологий дополнения к дискриминанту. Применяя двойственность Александера, получаем

$$H^j(P_d \setminus \Sigma_k) = \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{при } j = 0, (k-2), 2(k-2), \ldots, [d/k](k-2); \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Двойственность Александера хочется применить немножко раньше: к самой спектральной последовательности. Для этого формально заменим исходную спектральную последовательность на двойственную по Александеру когомологическую последовательность:

$$E_r^{p,q} \cong E^r_{-p,d-q-1}.$$

Двойственная последовательность сходится к когомологиям дополнения дискриминанта. Она лежит во втором квадранте плоскости (p, q), то есть в области где $(p \leq 0, q \geq 0)$, и ее член $E_1^{p,q}$ (а следовательно и все последующие члены $E_r^{p,q}$, $r > 1$) изоморфны $\mathbf{Z}$ при $q + (k-1)p = 0, p \geq -[d/k]$, и тривиальны при всех остальных p, q.

Смысл этой формальной замены вот в чем. Подумаем, что происходит с вычислением, когда мы изменяем d на $d' > d$. При старом вычислении спектральная последовательность как единое целое съедет вверх в полосе $[d/k]$. (За этой полосой может что-то добавиться.) Однако *ко*гомологии $P_d \setminus \Sigma_k$ и $P_{d'} \setminus \Sigma_k$ устроены похоже: они совпадают вплоть до довольно больших размерностей: $H^i(P_{d'} \setminus \Sigma_k) \cong H^i(P_d \setminus \Sigma_k)$ при $i < ([d/k]+1)(k-2)$ (а если [d/k]=[d'/k], то и во всех размерностях), т.е. происходит *стабилизация* по d. Это трудно увидеть из исходных гомологических спектральных последовательностей. Но после формальной замены спектральные последовательности совпадают в первых членах в полосе $p \geq -[d/k]$. Это наводит на мысль о существовании некоторого предела когомологий относительно естественных вложений пространств $P_* \setminus \Sigma_k$ друг в друга, а также о том, что эти предельные когомологии вычисляются при помощи некоторой спектральной последовательности, получающейся предельным переходом при $d \to \infty$ именно по перевернутым спектральным последовательностям $E_r^{p,q}$. Эти подозрения не беспочвенны. Более того, как мы увидим на следующей лекции, эта *стабильная* спектральная последовательность вычисляет не только нечто абстрактное — какой-то предел групп когомологий относительно каких-то отображений — но и когомологии некоторого вполне естественного топологического пространства.

При $d' > d$ и при фиксированном k имеется естественное отображение $P_d \to P_{d'}$, при котором Σ_k переходит в Σ_k. В результате получаем вложение

$$P_d \setminus \Sigma_k \to P_{d'} \setminus \Sigma_k$$

и возникает отображение в обратную сторону в когомологиях

$$H^*(P_d \setminus \Sigma_k) \leftarrow H^*(P_{d'} \setminus \Sigma_k). \tag{2}$$

Вложений $P_d \to P_{d'}$ много, но все они индуцируют одно и то же отображение в когомологиях. Такие вложения можно построить, например, следующим образом. Введем на P_d гладкую функцию $\mu : P_d \to \mathbf{R}_+$, для которой $\mu(f) > \max|\text{корни}\, f| + 1$, и рассмотрим отображение $f \to f \cdot (x - \mu(f))^{d'-d}$.

В качестве $\mu(f)$ можно взять, например, сумму модулей коэффициентов + 1 и сгладить полученную функцию; можно также вместо $|a_i|$ взять $a_i^2 + 1$.

Изучим, как устроено отображение в когомологиях. Полезно локализовать эту задачу. Всё пространство P_d рассматривать не обязательно. Можно рассматривать малый открытый шар с центром в нуле: $\overset{\circ}{B}_\varepsilon \subset P_d$. Действительно, вложение $\overset{\circ}{B}_\varepsilon \setminus \Sigma_k$ в $P_d \setminus \Sigma_k$ является гомотопической эквивалентностью, гомотопной гомеоморфизму. Это можно доказать с помощью действия на P_d однопараметрической группы *квазиоднородных растяжений* T_t, $t \in (0, +\infty)$, действующей так:

$$T_t : \prod_{i=1}^{d} (x - x_i) \mapsto \prod_{i=1}^{d} (x - t x_i),$$

где x_i — все корни полинома, или, эквивалентно,

$$T_t(x^d + a_1 x^{d-1} + \cdots + a_d) = x^d + t a_1 x^{d-1} + \cdots + t^d a_d.$$

Относительно действия T_t дискриминант инвариантен.

Неособыми точками поверхности $\Sigma_d \subset P_{d'}$ являются полиномы, имеющие один корень кратности d и не имеющие никаких других кратных корней. Рассмотрим малый шар $U_\varepsilon(\alpha)$ с центром в такой неособой точке $\alpha \in \Sigma_d$. Тогда имеются гомеоморфизмы пар

$$(U_\varepsilon(\alpha), U_\varepsilon(\alpha) \bigcap \Sigma_k) \sim (\overset{\circ}{B}_\varepsilon, \overset{\circ}{B}_\varepsilon \bigcap \Sigma_k) \times \mathbf{R}^{d'-d} \sim (P_d, \Sigma_k) \times \mathbf{R}^{d'-d}. \tag{3}$$

Вложение $P_d \hookrightarrow P_{d'}$ можно реализовать еще и таким образом: рассмотреть P_d как слой $P_d \times \{0\}$ правой части (3) и вложить его в U_ε, а следовательно и в $P_{d'}$, пользуясь сквозным гомеоморфизмом (3). Это вложение индуцирует искомый гомоморфизм (2) колец когомологий.