Задачи по алгебрам Ли 1.

1. Докажите, что центр алгебры Ли не может иметь коразмерность 1. Сформулируйте теоретико-групповой аналог этой задачи.

2. Пусть L — произвольная антикоммутативная алгебра. Докажите, что для любых линейно зависимых $x, y, z \in L$ выполнено тождество Якоби.

3. Найдите все конечномерные алгебры Ли, такие, что $dim[L, L] = 1$.

4. Найдите все дифференцирования двумерной неабелевой алгебры Ли.

5. Докажите, что алгебра Ли $sl_2(C)$ проста.

6. Найдите все дифференцирования кольца $C[z]$. Покажите, что алгебра Ли дифференцирований имеет базис $L_i, i \geq -1, i \in Z$, такой, что $[L_i, L_j] = (i-j)L_{i+j}$. Найдите все идеалы этой алгебры Ли.

7. Найдите алгебру Ли дифференцирований кольца $C[z, z^{-1}]$ и покажите, что эта алгебра проста.

8. Найдите все алгебры Ли размерности ≤ 3 над полем R.

9. Докажите, что алгебры Ли $sl_n(C), n \geq 2$ и $so_n(C), n \geq 3$ совершенны, то есть совпадают со своим коммутантом.

10. Докажите, что не существует ассоциативной алгебры A, такой, что $sl_2(C) = A^-$.

11. (a) Докажите, что не существует комплексных матриц x, y, таких, что $[x, y] = 1$.

(b) Найдите точное конечномерное представление алгебры Гейзенберга.

12. Пусть L — алгебра Ли со следующими свойствами: ее центр тривиален, она не совпадает со своим коммутантом, все ее дифференцирования — внутренние. Докажите, что L не может быть коммутантом никакой алгебры Ли. В частности, двумерная неабелева алгебра Ли не может быть коммутантом.

13. Пусть F — поле характеристики $\neq 2$. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

(i) Алгебра с векторным произведением и алгебра $sl_2(C)$ изоморофны;

(ii) -1 является суммой двух квадратов в F.

В частности, над R эти алгебры неизоморфны.