Задачи по алгебрам Ли 2.

1. Покажите, что все неприводимые представления абелевой алгебры Ли одномерны.

2. Пусть G — группа, для $x, y \in G$ обозначим $(x, y) := x^{-1}y^{-1}xy$ и $x^y = y^{-1}xy$. Докажите, что

$$(x^y, (y, z))(y^z, (z, x))(z^x, (x, y)) = 1$$

для любых $x, y, z \in G$.

3. (a) Пусть A — матрица. Покажите, что ряд $exp(A) = \sum_{n \geq 0} A^n/n!$ сходится.

(b) Покажите, что $exp(A + B) = exp(A)exp(B)$, если A и B коммутируют.

(c) Покажите, что $det(exp(A)) = exp(tr(A))$.

(d) Покажите, что $exp(-xA)exp(-yB)exp(xA)exp(yB) = xy[A, B] + \ldots$, где многоточие означает члены более высокого порядка.

4. Пусть D — дифференцирование конечномерной алгебры. Докажите, что $exp(D)$ — автоморфизм этой алгебры.

5. Покажите, что конечномерное представление вещественной алгебры Ли в пространстве с эрмитовой формой, такое, что все элементы алгебры Ли действуют косоэрмитовыми преобразованиями, вполне приводимо. Покажите, что пространство всех косоэрмитовых матриц является алгеброй Ли.

6. (a) Найдите в универсальной обертывающей алгебре алгебры Ли $sl_2(C)$ нетривиальный центральный элемент наименьшей возможной степени.

(b) Найдите центр универсальной обертывающей алгебры $sl_2(C)$.

7. Найдите центры универсальных обертывающих алгебр всех остальных $\leq 3-$ мерных алгебр Ли над C.

8. Пусть L — неабелева двумерная алгебра Ли с базисом $a, b, [a, b] = a$. По теореме Пуанкаре-Биркгофа-Витта её универсальная обертывающая алгебра имеет базис из элементов $a^i b^j$. Выразите произведение базисных элементов $a^i b^j$ и $a^k b^l$ как линейную комбинацию базисных элементов.

9. Пусть L — алгебра Ли, $S \subset L$ — подпространство. Аннулятор $Ann(S)$ — это множество элементов L, коммутирующих со всеми элементами из S.

(a) Покажите, что $Ann(S)$ — подалгебра в L.

(b) Покажите, что аннулятор идеала является идеалом.

(c) Приведите пример подалгебры, аннулятор которой не является идеалом.

10. Пусть A — ассоциативная алгебра.

(a) Покажите, что для любого $a \in A$ отображение $d_a : A \to A, b \mapsto ab - ba$ является дифференцированием. Такие дифференцирования называются внутренними.

(b) Покажите, что множество внутренних дифференцирований является идеалом в алгебре Ли $Der(A)$ всех дифференцирований алгебры A.

(c) Покажите, что утверждение пункта (b) верно, если A — алгебра Ли.

11. Докажите, что все дифференцирования ассоциативной алгебры $Mat(n, C)$ являются внутренними.

12. (a) Покажите, что алгебра Ли проста тогда и только тогда, когда её присоединенное представление неприводимо.

(b) Пусть присоединенное представление алгебры Ли L вполне приводимо. Покажите, что L — прямая сумма нескольких простых алгебр Ли.

13. Пусть все конечномерные представления конечномерной алгебры Ли L вполне приводимы. Покажите, что L — прямая сумма неабелевых простых алгебр Ли.