Задачи по алгебрам Ли 3.

1. Пусть I — центральный идеал в алгебре Ли L, факторалгебра L/I нильпотентна. Докажите, что L нильпотентна.

2. Докажите, что четырехмерная нильпотентная алгебра Ли обладает трехмерным абелевым идеалом. Найдите все такие алгебры Ли.

3. Пусть конечномерная алгебра Ли L над полем характеристики 0 допускает невырожденное (как линейный оператор) дифференцирование. Докажите, что L нильпотентна.

4. (a) Пусть L — конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Предположим, что в L имеется $n-$мерная разрешимая подалгебра $S \neq L$. Докажите, что в L имеется $(n+1)-$мерная подалгебра.

(b) Пусть L — $n-$мерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 0, M — максимальная подалгебра в L. Докажите, что если M разрешима, то $dim M = n - 1$.

5. Докажите, что алгебры Ли, заданные образующими x, y и соотношениями

(a) $ad(x)^2y = ad(y)^2x = 0$;
(b) $ad(x)^2y = ad(y)^3x = 0$;
(c) $ad(x)^2y = ad(y)^4x = 0$

конечномерна и нильпотентна. Найдите размерность этих алгебр Ли.

6. Докажите, что всякая ненильпотентная конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем содержит 2-мерную неабелеву подалгебру.

В оставшихся задачах мы докажем теорему Энгеля:

Теорема. Пусть L — алгебра Ли и $\rho : L \to End(V)$ — её конечномерное представление, такое, что $\rho(x)$ нильпотентно для любого $x \in L$. Тогда существует базис пространства V, такой, что все элементы $\rho(x)$ представляются в нем строго верхнетреугольными матрицами.

7. Выведите из теоремы Энгеля, что алгебра Ли нильпотентна тогда и только тогда, когда все операторы $ad(x)$ нильпотентны.

8. Покажите, что теорема Энгеля эквивалентна следующему утверждению: в условиях теоремы Энгеля существует ненулевой вектор $v \in V$, такой, что $\rho(x)v = 0$ для всех $x \in V$.

9. Покажите, что для доказательства теоремы Энгеля достаточно рассмотреть случай, когда представление ρ точно.

10. Покажите, что в условиях теоремы Энгеля операторы $ad(\rho(x)) : End(V) \to End(V)$ нильпотентны для всех $x \in L$.

11. Покажите, что нормализатор любой собственной подалгебры L строго больше этой подалгебры

12. Покажите, что в L имеется идеал коразмерности 1.

13. Докажите теорему Энгеля.