# Задачи по алгебрам Ли 4.

1. Пусть $e, f, h$ — стандартный базис $sl_2(C)$. Покажите, что в универсальной обертывающей алгебре выполнено равенство:

$$\left[\frac{e^m}{m!}, \frac{f^n}{n!}\right] = \sum_{j=1}^{min(m,n)} \frac{f^{n-j}}{(n-j)!}\binom{h-m-n+2j}{j}\frac{e^{m-j}}{(m-j)!},$$

где $\binom{a}{j} = \frac{a(a-1)\ldots(a-j+1)}{j!}$ — "биномиальный коэффициент".

2. Пусть $V$ — конечномерное представление $sl_2(C)$. Пусть $V^e$ — пространство сингулярных векторов. Докажите, что $h$ действует на $V^e$ полупросто.

3. (a) Пусть $L_1$ и $L_2$ — неприводимые конечномерные представления $sl_2(C)$. Пусть $V$ — такой $sl_2(C)-$модуль, что $V$ содержит подмодуль, изоморфный $L_1$, фактормодуль по которому изоморфен $L_2$. Докажите, что $V$ изоморфен $L_1 \oplus L_2$.

(b) Докажите, что все конечномерные $sl_2(C)-$модули вполне приводимы.

4. (a) Пусть $\lambda \in C$ — некоторое число. Пусть $V$ — (бесконечномерное) векторное пространство с базисом $v_0, v_1, v_2, \ldots$. Определим на этом пространстве действие оператора $f$ формулой $fv_i = v_{i+1}$. Покажите, что формулы $ev_0 = 0$ и $hv_0 = \lambda v_0$ единственным образом продолжаются до действия $sl_2(C)$ на пространстве $V$. Получившийся модуль называется модулем Верма $V(\lambda)$.

(b) Найдите все подмодули $V(\lambda)$.

5. Согласно задаче 3 (b), $sl_2(C)-$модуль $L(n) \otimes L(m)$ — прямая сумма некоторых простых $sl_2(C)-$модулей. Каких и с какими кратностями?

6. Какова кратность тривиального представления в $L(1)^{\otimes n}$?

7. Докажите, что для любого $n \geq 0$ $n-$ая симметрическая степень $L(1)$ — неприводимый $sl_2(C)-$модуль и все неприводимые конечномерные $sl_2(C)-$ модули так получаются.

8. (a) Разложите 3-ю внешнюю степень $L(5)$ в сумму неприводимых подмодулей.

(b) Разложите 3-ю симметрическую степень $L(5)$ в сумму неприводимых подмодулей.

9. Алгебра Ли $L = sl_3(C)$ содержит подалгебру матриц с ненулевыми элементами в левом верхнем квадрате $2 \times 2$, изоморфную $sl_2(C)$. Разложите $L$ в сумму неприводимых $sl_2(C)-$модулей, относительно присоединенного действия этой подалгебры.

10. Пусть $V$ — векторное пространство над $C$; $x \in End(V)$.

(a) Существуют многочлены $p(T)$ и $q(T)$ без свободного члена, такие, что $p(x)$ — полупростой оператор, $q(x)$ — нильпотентный оператор и $x = p(x) + q(x)$.

(b) Существует единственное разложение $x = x_s + x_n$ в сумму коммутирующих полупростого $x_s$ и нильпотентного $x_n$ операторов (разложение Жордана).

11. Пусть $x \in End(V)$ и $x = x_s + x_n$ — его разложение Жордана. Тогда $ad(x) = ad(x_s) + ad(x_n)$ — разложение Жордана $ad(x)$.

12. Пусть $A$ — конечномерная алгебра над $C$. Пусть $d$ — дифференцирование $A$. Тогда $d_s$ и $d_n$ — тоже дифференцирования $A$.

13. Пусть $e$ — нильпотентная матрица. Докажите, что существуют матрицы $h$ и $f$, такие, что для $e, f, h$ выполнены соотношения $sl_2(C)$.