Задачи по алгебрам Ли 5.

1. Вычислите дискриминант формы Киллинга для алгебр Ли $sl_2(C), sl_3(C)$ относительно стандартного базиса.

2. (a) Докажите, что форма Киллинга нильпотентной алгебры Ли тождественно равна 0.

(b) Найдите форму Киллинга 2-мерной неабелевой алгебры Ли.

3. Пусть L — простая алгебра Ли. Докажите, что любая инвариантная форма на ней пропорциональна форме Киллинга.

4. Пусть $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots$ — полупростая алгебра Ли, разложенная в сумму простых алгебр Ли. Докажите, что любой идеал L — сумма некоторых из L_i.

5. Докажите, что все дифференцирования полупростой алгебры Ли внутренние.

6. Алгебра Ли называется редуктивной, если её разрешимый радикал совпадает с её центром.

(a) Редуктивная алгебра Ли является прямой суммой простых алгебр Ли.

(b) Докажите, что алгебра Ли редуктивна тогда и только тогда, когда она допускает невырожденную инвариантную форму.

7. Пусть L — произвольная конечномерная алгебра Ли и V — её конечномерное неприводимое представление. Докажите, что образ L в $gl(V)$ редуктивен.

8. Алгебра Ли L редуктивна тогда и только тогда, когда она допускает точное вполне приводимое представление.

9. Докажите, что алгебра $gl_n(C)$ неполупроста, но редуктивна.

10. Докажите, что алгебры Ли $sl_n(C), sp_{2n}(C), n \geq 2$ и $so_n(C), n \geq 3$ полупросты.

11. Пусть L — произвольная конечномерная алгебра Ли. Докажите, что тензорное произведение вполне приводимых конечномерных $L-$модулей вполне приводимо.

12. Пусть $L \subset gl(V)$ — полупростая конечномерная алгебра Ли.

(a) Если $x \in L$, то и $x_s, x_n \in L$.

(b) Будем говорить, что $x \in L$ полупрост (нильпотентен), если оператор $ad(x)$ полупрост (нильпотентен). Докажите, что в любом конечномерном представлении полупростой (нильпотентный) x действует полупростым (нильпотентным) оператором.

13. Пусть $L' \subset L$ — полупростая подалгебра в полупростой алгебре Ли. Докажите, что для $x \in L$ разложение Жордана x в L' является разложением Жордана x в L.