6.

1.Пусть L — полупростая алгебра Ли; H — ее подалгебра Картана, $C_L(H)$ — централизатор H в L.

(a) Если $x \in C_L(H)$, то $x_s \in C_L(H)$ и $x_n \in C_L(H)$.

(b) Если $x \in C_L(H)$ полупрост, то $x \in H$.

(c) Ограничение формы Киллинга на H невырождено.

(d) Алгебра Ли $C_L(H)$ нильпотентна.

(e) $H \cap [C_L(H), C_L(H)] = 0$.

(f) Алгебра Ли $C_L(H)$ абелева.

(g) $C_L(H) = H$.

2. (a) Докажите, что диагональные матрицы образуют подалгебру Картана в $sl_n(C)$.

(b) Найдите какую-нибудь подалгебру Картана в $so_n(C)$, $sp_{2n}(C)$.

3. Найдите все корни для алгебр Ли $sl_n(C), so_n(C), sp_{2n}(C)$.

4. Докажите, что подалгебра Картана совпадает со своим нормализатором.

5. (a) Пусть $h \in H$. Докажите, что алгебра Ли $C_L(h)$ редуктивна.

(b) Докажите, что найдется $h \in H$, такой, что $C_L(h) = H$.

6. Докажите, что не существует полупростых алгебр Ли размерностей 4,5,7.

7. Пусть $\alpha, \beta \in R$ и $(\alpha, \beta) > 0$. Докажите, что $\alpha - \beta \in R$. Верно ли обратное?

8. Пусть R — система корней, $\alpha, \beta \in R$. Докажите, что угол между α и β может быть равен только $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4, 5\pi/6, \pi$.

9. Найдите все системы корней ранга 2.

10. Докажите, что в неприводимой системе корней длина корня может принимать не более 2 значений.

11. Для систем корней алгебр $sl_n(C), so_n(C), sp_{2n}(C)$ найдите простые корни и диаграммы Дынкина.

12. Найдите группы Вейля для систем корней ранга 2, системы корней алгебры $sl_n(C)$.

13. Для каждой системы корней ранга ≤ 2 докажите, что существует не более одной алгебры Ли с такой системой корней.