# 7.

1. Пусть $A = (a_{ij}), i, j = 1, \dots n$ — матрица Картана, содержащая лишь 0,2 и $-1$. Рассмотрим решетку (= свободную абелеву группу) $Q$, порожденную векторами $\alpha_i, i = 1, \dots n$. Введем на $Q$ скалярное произведение по правилу $(\alpha_i, \alpha_j) = a_{ij}$. Рассмотрим множество $R$ всех элементов $\alpha \in Q$, таких, что $(\alpha, \alpha) = 2$. Докажите, что $R$ — система корней; множество $\Delta = \{\alpha_1, \dots \alpha_n\}$ образует систему простых корней в $R$.

2. (a) Докажите, что для любого положительного и непростого корня $\alpha$ найдется простой корень $\beta$, такой, что $\alpha - \beta$ — корень.

(b) Докажите, что любой положительный корень можно при помощи отражений относительно простых корней перевести в простой корень.

3. Докажите, что существует ровно одна система корней с каждой из диаграмм Дынкина $A_n, D_n, E_6, E_7, E_8$ и не более одной для оставшихся диаграмм Дынкина.

4. Докажите, что группа Вейля порождена отражениями относительно простых корней (простые отражения).

5. Пусть $R$ — система корней, в которой все корни имеют одинаковую длину ($A, D$ или $E$). Можно считать, что эта длина равна 2. Пусть $Q$ — решетка, порожденная $R$ (то есть всевозможные линейные комбинации с целыми коэффициентами корней). Функция асимметрии на $Q$ — это такая функция $\varepsilon : Q \times Q \to \{\pm 1\}$, что (1) $\varepsilon(\alpha + \alpha', \beta) = \varepsilon(\alpha, \beta)\varepsilon(\alpha', \beta)$; (2) $\varepsilon(\alpha, \beta + \beta') = \varepsilon(\alpha, \beta)\varepsilon(\alpha, \beta')$; и (3) $\varepsilon(\alpha, \alpha) = (-1)^{1/2(\alpha, \alpha)}$ (заметим, что $(\alpha, \alpha)$ всегда четно).

(a) Докажите, что для каждой из систем корней типа $A, D, E$ функция асимметрии существует.

(b) Пусть $\alpha, \beta \in R$. Покажите, что $\alpha + \beta \in R$ тогда и только тогда, когда $(\alpha, \beta) = -1$.

(c) Пусть $H$ — линейная оболочка над $C$ решетки $Q$. Рассмотрим векторное пространство $L = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} CE_\alpha$ (здесь каждое $CE_\alpha$ — одномерное пространство с базисом $E_\alpha$. Введем на $L$ операцию умножения по правилам:

$$[h, h'] = 0 \,\text{если}\, h, h' \in H,$$

$$[h, E_\alpha] = (h, \alpha)E_\alpha \,\text{если}\, h \in H, \alpha \in R,$$

$$[E_\alpha, E{-}\alpha] = -\alpha \,\text{если}\, \alpha \in R,$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = 0 \,\text{если}\, \alpha, \beta \in R, \alpha + \beta \notin R \cup \{0\},$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = \varepsilon(\alpha, \beta)E_{\alpha+\beta} \,\text{если}\, \alpha, \beta, \alpha + \beta \in R.$$

Покажите, что $L$ — полупростая алгебра Ли, $H$ — ее подалгебра Картана, и $R$ — система корней пары $(L, H)$.

6. Пусть $R$ — система корней типа $A_{2n-1}, D_n, E_6, D_4$. В каждом из этих случаев рассмотрим очевидный автоморфизм $\mu$ диаграммы Дынкина порядка 2 в первых трех случаях и 3 в последнем случае.

(a) Докажите, что существует функция асимметрии, инвариантная относительно $\mu$.

(b) Докажите, $\mu$ продолжается до автоморфизма $\mu_1$ алгебры Ли $L$ из задачи 5.

(c) Докажите, что инварианты автоморфизма $\mu_1$ — полупростая алгебра Ли и найдите систему корней этой алгебры Ли во всех случаях.

7. Вычислите определители матриц Картана всех неприводимых систем корней.

8. Пусть $L$ — полупростая алгебра Ли и $L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_r$ — ее разложение в сумму простых. Пусть $H$ — подалгебра Картана в $L$. Тогда $H = L_1 \cap H \oplus \ldots \oplus L_r \cap H$ и $L_i \cap H$ — подалгебра Картана в $L_i$.

9. Пусть $L$ — полупростая алгебра Ли. Пусть ее система корней неприводима. Тогда $L$ проста.

10. Опишите весовые разложения для тавтологических представлений классических алгебр Ли, в частности найдите их старшие веса.

11. Найдите весовые разложения для присоединенных представлений простых алгебр Ли. Старший вес присоединенного представления называется старшим корнем. Во всех случаях выразите его через простые корни.

12. Докажите, что следующие алгебры Ли над $C$ изоморфны: $sl_2$ и $so_3$; $so_4$ и $sl_2 \oplus sl_2$; $so_6$ и $sl_4$; $so_5$ и $sp_4$.

13. Пусть $L$ — полупростая алгебра Ли, $d$ — натуральное число. Докажите, что существует лишь конечное число неизоморфных $L-$модулей размерности $\leq d$.