8.

1. Вычислите характеры всех неприводимых представлений $sl_3(C)$ размерности ≤ 10.

2. Разложите тензорное произведение 3-мерного и 6-мерного неприводимых представлений $sl_3(C)$ (имеется 2 существенно различных случая).

3. Выведите из формулы Вейля для характера формулу Вейля для размерности.

4. Вычислите характеры симметрического и внешнего квадратов присоединенного представления $sl_3(C)$ и разложите их в сумму неприводимых.

5.(a) Выразите вектор Вейля для алгебры $sl_n(C)$ через простые корни.

(b) Выразите фундаментальные веса алгебры $sl_n(C)$ через простые корни.

6. Покажите, что формула Вейля для знаменателя для алгебры Ли $sl_n(C)$ совпадает с тождеством Вандермонда.

7. Докажите, что внешние степени тавтологического представления $sl_n(C)$ неприводимы и найдите их старшие веса.

8. Докажите, что симметрические степени тавтологического представления $sl_n(C)$ неприводимы и найдите их старшие веса.

9. (a) Докажите, что для классических алгебр Ли тавтологические представления являются точными неприводимыми представлениями наименьшей возможной размерности.

(b) Найдите точное неприводимое представление наименьшей размерности алгебры G_2.

10. (Функция Костанта) Для любого веса λ пусть $p(\lambda)$ — количество представлений λ в виде суммы положительных корней. Пусть $\lambda \in X_+$ — доминантный вес, $\mu \in X$ — произвольный вес. Пусть $m_\lambda(\mu)$ — кратность веса μ в представлении $L(\lambda)$. Докажите, что $m_\lambda(\mu) \leq p(\lambda - \mu)$.

11. Докажите, что $m_\lambda(\mu) = \sum_{w \in W} (-1)^w p(w(\lambda + \rho) - \mu - \rho)$.

12. Для любого $\mu \in X$ существует $\lambda_0 \in X_+$, такое, что $m_\lambda(\lambda - \mu) = p(\mu)$ для всех $\lambda > \lambda_0$.

13. Пусть $g = sl_3(C)$. Чему равна кратность нулевого веса в неприводимом модуле со старшим весом $m\omega_1 + n\omega_2$?