Лекция 1
Тензоры

▷Тензорное произведение ▷Стандартные базисы ▷Каноническая двойственность ▷Тензорное произведение линейных операторов ▷Тензорная алгебра векторного пространства ▷Умножения и свёртки ▷Симметрические тензоры ▷Поляризация однородных многочленов ▷Кососимметрические тензоры ▷Внешнее умножение

§1. Тензорное произведение векторных пространств

1.1. Полилинейные отображения. Через V (или V_i) мы всегда будем обозначать конечномерное векторное пространство размерности d (или d_i) над произвольным полем k[1]. Если речь будет идти не об одном пространстве, а о нескольких, то количество этих пространств обозначается через n.

Теоретико-множественное произведение пространств $V_1, V_2, \ldots, V_n$ обозначается через $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$. Если мы будем рассматривать его как *векторное пространство* (относительно стандартной структуры), то будем писать $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$.

Если W — ещё одно векторное пространство, то теоретико-множественное отображение $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\varphi} W$ мы будем называть *полилинейным*, если оно линейно по каждому из аргументов (при фиксированных остальных). Полилинейные отображения со значениями в одномерном пространстве $W = k$ называются *полилинейными формами*.

Подчеркнём, что полилинейное отображение $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\varphi} W$, как правило, не является *линейным оператором* из $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$ в W.

Задача 1.1. Опишите все случаи, когда полилинейное отображение $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\varphi} W$ будет одновременно являться линейным оператором из $\bigoplus_i V_i$ в W, и все случаи, когда линейный оператор оказывается полилинейным отображением.

Задача 1.2. Докажите, что множество всех полилинейных отображений $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$ составляет векторное пространство и найдите его размерность.

1.1.1. Базис в пространстве полилинейных отображений. Пусть в каждом из пространств V_i зафиксирован базис $\{e^{(i)}_\alpha\}_{1 \leqslant \alpha \leqslant \dim V_i}$. Всякое полилинейное отображение $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$ однозначно восстанавливается по своим значениям

$$\varphi(e^{(1)}_{\alpha_1}, e^{(2)}_{\alpha_2}, \ldots, e^{(n)}_{\alpha_n}) \in W$$

[1]желающие могут почти везде без ущерба для понимания полагать $k = \mathbb{C}$

на всевозможных сочетаниях базисных векторов, и ясно, что этот набор значений может быть задан произвольно. Таким образом, в качестве базиса в пространстве полилинейных отображений $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{f} W$ можно взять $\dim W \cdot \prod \dim V_i$ отображений $\varepsilon^{\beta}_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}$, каждое из которых переводит соответствующий набор базисных векторов $(e^{(1)}_{\alpha_1}, e^{(2)}_{\alpha_2}, \ldots, e^{(n)}_{\alpha_n})$ в базисный вектор e^{β} пространства W, а все остальные наборы базисных векторов — в нуль.

Задача 1.3. Пусть $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ — некий набор векторов. Проверьте, что все v_i отличны от нуля тогда и только тогда, когда существует полилинейная форма, принимающая ненулевое значение на этом наборе векторов.

1.2. Определение. *Пространство P вместе с полилинейным отображением $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\tau} P$ называется тензорным произведением данных пространств $V_1, V_2, \ldots, V_n$, если выполняется следующее свойство: всякое полилинейные отображения из $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ в любое W единственным способом представляется в виде композиции τ и линейного оператора из P в W.*

Иначе говоря, для любого полилинейного $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\varphi} W$ существует единственный линейный оператор $P \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} W$, включающийся в коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dd, dashed, "\widetilde{\varphi}"] \\
V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \arrow[ur, "\tau"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \\
 & W
\end{tikzcd}$$

Интуитивно, тензорное произведение есть «универсальное полилинейное отображение», позволяющее единственным образом «линеаризовать»произвольное полилинейное отображение.

У приведённого нами определения имеется неприятная особенность, — оно неявное, т. е. не указывает способ построения определяемого объекта, и значит, не гарантирует его существования. Тем не менее, у этого определения есть и сильная сторона.

1.2.1. Единственность тензорного произведения (при условии, что оно существует) тавтологически вытекает из его универсальности. В самом деле, пусть $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\tau_1} P_1$ и $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\tau_2} P_2$ — два объекта, удовлетворяющие определению Опр.1.2. Тогда из универсальности P_1 и P_2 соответственно возникают линейные операторы $P_1 \xrightarrow{\widetilde{\tau}_2} P_2$ и $P_2 \xrightarrow{\widetilde{\tau}_1} P_1$, включающиеся в диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[rr, equal, "\mathrm{Id}_{P_1}"] & & P_1 \arrow[dd, dashed, "\widetilde{\tau}_2"] \\
 & V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \arrow[ul, "\tau_1"] \arrow[ur, "\tau_1"'] \arrow[dl, "\tau_2"'] \arrow[dr, "\tau_2"] & \\
P_2 \arrow[uu, dashed, "\widetilde{\tau}_1"] \arrow[rr, equal, "\mathrm{Id}_{P_2}"'] & & P_2
\end{tikzcd}$$

Композиция $P_2 \xrightarrow{\widetilde{\tau}_2\widetilde{\tau}_1} P_2$ является линейным оператором, замыкающим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & P_2 \arrow[dl, dotted, "\widetilde{\tau}_1"'] \arrow[dd, equal, "\mathrm{Id}_{P_2}"] \\
V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \arrow[urr, "\tau_2"] \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[drr, "\tau_2"'] & P_1 \arrow[dr, dotted, "\widetilde{\tau}_2"] & \\
 & & P_2
\end{tikzcd}$$

и в силу единственности такого оператора (из универсальности P_2) должна совпадать с тождественным оператором: $\widetilde{\tau}_2\widetilde{\tau}_1 = \mathrm{Id}_{P_2}$. По аналогичным причинам $\widetilde{\tau}_1\widetilde{\tau}_2 = \mathrm{Id}_{P_1}$, т. е. τ_1 и τ_2 – взаимно обратные изоморфизмы. Итак, тензорное произведение, буде оно существует, *единственно с точностью до единственного изоморфизма перестановочного с универсальным полилинейным отображением* τ.

1.2.2. Инвариантная конструкция тензорного произведения. В отличие от единственности, существование никак не обусловлено чистой логикой Опр.1.2, и для явного построения тензорного произведения мы должны явно воспользоваться свойствами векторных пространств.

Рассмотрим бесконечномерное векторное пространство $\mathcal{V}$, состоящее из конечных линейных комбинаций бесконечного семейства базисных векторов, которые взаимно однозначно соответствуют всевозможным формальным выражениям вида $v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_n$, где v_i независимо пробегают V_i. Рассмотрим в $\mathcal{V}$ подпространство $\mathcal{E}$, порождённое всевозможными комбинациями вида

$$v_1 \cdots v_i \cdots v_n \quad - \quad \lambda v_1 \cdots v_i' \cdots v_n \quad - \quad \mu v_1 \cdots v_i'' \cdots v_n \ ,$$

где $v_i = \lambda v_i' + \mu v_i''$. Положим $P_{\text{инв}} = \mathcal{V}/\mathcal{E}$ и зададим $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\tau} P_{\text{инв}}$ правилом

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) \longmapsto v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_n \,(\mathrm{mod}\, \mathcal{E}) \ .$$

Покажем, что $P_{\text{инв}}$ и τ удовлетворяют определению тензорного произведения.

Пусть $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\varphi} W$ — произвольное полилинейное отображение. Чтобы разложить φ в композицию $\varphi = \widetilde{\varphi}\tau$, необходимо и достаточно определить линейный оператор $\widetilde{\varphi}$ так, чтобы он переводил классы $v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_n \,(\mathrm{mod}\, \mathcal{E})$ в $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Поскольку векторы $v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_n \,(\mathrm{mod}\, \mathcal{E})$ порождают $P_{\text{инв}}$, такой оператор $\widetilde{\varphi}$ автоматически единствен, если существует. Вместе с тем правило $v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_n \longmapsto \varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$, сопоставляя базисным векторам пространства $\mathcal{V}$ векторы пространства W, определяет некий линейный оператор из $\mathcal{V}$ в W, причём из полилинейности φ немедленно следует, что подпространство $\mathcal{E}$ лежит в его ядре, и следовательно, он корректно факторизуется до линейного оператора $P_{\text{инв}} = \mathcal{V}/\mathcal{E} \longrightarrow W$, переводящего классы $v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_n \,(\mathrm{mod}\, \mathcal{E})$ в $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$, что и требовалось.

1.3. Обозначения и терминология. Тензорное произведение пространств $V_1, V_2, \dots, V_n$ обозначается $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ или $\bigotimes\limits_i V_i$. Элементы этого пространства называются *тензорами*.

Образ n-ки векторов $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ при универсальном полилинейном отображении $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\tau} V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ обозначается $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n$ и называется *тензорным произведением* этих векторов. Все такие тензоры называются *разложимыми*.

Напротив, тензоры, не попавшие в образ τ, называются *неразложимыми*. Обратите внимание на то, что образ τ *не является векторным подпространством*, ибо τ полилинеен, а не линеен.

Задача 1.4. Докажите, что тензорное произведение векторов равно нулю тогда и только тогда, когда один из сомножителей равен нулю.

Задача 1.5. Пусть векторы $e_1, e_2, \ldots, e_d$ линейно независимы в пространстве V, и W — любое ненулевое пространство. Докажите, что каждое из подпространств

$$\langle e_i \rangle \otimes W \subset V \otimes W$$

изоморфно W, а их сумма является прямой (через $\langle e_i \rangle$ обозначено одномерное подпространство в V, порождённое вектором e_i).

Задача 1.6. Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ и $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q\}$ — базисы пространств V и W. Докажите, что pq разложимых тензоров $e_i \otimes \xi_j$ составляют базис в $V \otimes W$.

1.4. Базис тензорного произведения. Пусть в каждом из пространств V_i зафиксирован базис $\{e^{(i)}_\alpha\}_{1 \leqslant \alpha \leqslant \dim V_i}$. Чтобы построить базис в тензорном произведении $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$, мы приведём ещё одну (неинвариантную) конструкцию этого пространства — в следствие единственности оно будет совпадать с построенным выше $P_{\text{инв}}$.

Рассмотрим векторное пространство $P_{\text{крд}}$ размерности $\prod \dim V_i$, базисом в котором являются формальные символы $e^{(1)}_{\alpha_1} \otimes e^{(2)}_{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes e^{(n)}_{\alpha_n}$, в которых $e^{(i)}_{\alpha_i}$ независимо пробегают фиксированные выше базисы пространств $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Согласно n° 1.1.1, правило, сопоставляющее каждому набору базисных векторов $(e^{(1)}_{\alpha_1}, e^{(2)}_{\alpha_2}, \ldots, e^{(n)}_{\alpha_n})$ вектор

$$\tau(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \stackrel{\text{def}}{=} e^{(1)}_{\alpha_1} \otimes e^{(2)}_{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes e^{(n)}_{\alpha_n} \in P_{\text{крд}}$$

однозначно продолжается до полилинейного отображения $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\tau} R$. Универсальность этого отображения также немедленно следует из n° 1.1.1. Таким образом, мы ещё раз явно предъявили тензорное произведение.

Согласно n° 1.2.1, имеется единственный изоморфизм $P_{\text{крд}} \xrightarrow{\sim} P_{\text{инв}}$, переводящий наш базис $e^{(1)}_{\alpha_1} \otimes e^{(2)}_{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes e^{(n)}_{\alpha_n}$ в тензорные произведения базисных векторов, понимаемые в смысле n° 1.3. В частности, *размерность тензорного произведения равна произведению размерностей пространств-сомножителей*, а *базис в тензорном произведении составляют всевозможные тензорные произведения базисных векторов пространств-сомножителей.*

§2. Естественные изоморфизмы

2.1. Что понимать под «естественностью»? Условимся называть линейный оператор из пространства V *естественным*[2], если его можно задать правилом, которое описывает образ произвольного вектора $v \in V$ только в «инвариантных» терминах самого этого вектора, без

[2] точное формальное определение естественности см. в [КМ] или в любом учебнике по гомологической алгебре

использования координат, базисов или каких либо других дополнительных структур на V. Например, существует естественный изоморфизм $V \xrightarrow{\sim} V^{**}$, но не существует естественного изоморфизма $V \xrightarrow{\sim} V^{*}$.

Задача 1.7. Постройте естественные линейные операторы, задающие изоморфизмы:

а) $U \otimes (V \otimes W)$ с $U \otimes V \otimes W$;

б) $(U \otimes V) \otimes W$ с $U \otimes V \otimes W$;

в) $(U \otimes V) \otimes W$ с $U \otimes V \otimes W$;

г) $U \otimes (V \oplus W)$ с $(U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$;

2.2. Полилинейные формы как тензоры. Рассмотрим отображение из $V_1^* \times V_2^* \times \cdots \times V_n^*$ в пространство полилинейных форм на $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$, переводящее набор функционалов $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ в их произведение, которое как форма на $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ действует по правилу

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) \longmapsto \prod_i \xi_i(v_i) . \tag{2-1}$$

Отображение это, очевидно, полилинейно, а потому определяет линейный оператор из $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \cdots \otimes V_n^*$ в пространство полилинейных форм на $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$, переводящий разложимые тензоры $\xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n$ в формы-произведения (2-1).

Задача 1.8. Убедитесь, что таким способом устанавливается изоморфизм между $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \cdots \otimes V_n^*$ и пространством полилинейных форм на $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$.

В дальнейшем мы без каких-либо специальных оговорок постоянно будем отождествлять эти два пространства посредством построенного только что изоморфизма. В частности, запись $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \cdots \otimes V_n^*$ будет использоваться и как обозначение для пространства полилинейных форм на $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$.

2.3. Канонический изоморфизм $\big(V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n\big)^* \to V_1^* \otimes V_2^* \otimes \cdots \otimes V_n^*$. Прямо из определения тензорного произведения вытекает, что имеется биекция между линейными операторами из $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ в основное поле k и k-значными полилинейными формами на $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$. С учётом предыдущего пункта это даёт канонический линейный изоморфизм между $\big(V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n\big)^*$ и $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \cdots \otimes V_n^*$, при котором результатом спаривания разложимого тензора $v = v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \in V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ с разложимым тензором $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n \in V_1^* \otimes V_2^* \otimes \cdots \otimes V_n^*$ является произведение

$$\langle\, v \,,\, \xi \,\rangle \overset{\text{def}}{=} \prod_i \xi_i(v_i) .$$

Это спаривание называется *полной свёрткой* тензора из $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ с тензором из $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \cdots \otimes V_n^*$.

2.4. Линейные операторы как тензоры. Зададим отображение из $V^* \times W$ в пространство $\mathrm{Hom}(V, W)$ линейных отображений из V в W отправив каждую пару (ξ, w) в соответствующий оператор проектирования на w вдоль $\mathrm{Ann}\,\xi$, который действует по правилу

$$v \longmapsto \langle\, v \,,\, \xi \,\rangle \cdot w . \tag{2-2}$$

Это отображение, очевидно, полилинейно, а стало быть определяет единственный линейный оператор $V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W)$, переводящий разложимые тензоры $\xi \otimes w$ в операторы (2-2).

Задача 1.9. Убедитесь, что таким способом устанавливается изоморфизм между $V^* \otimes W$ и $\mathrm{Hom}(V,W)$.

Задача 1.10. Пусть $\{e_i\}$ и $\{x_i\}$ — сопряжённые базисы в V и в V^*. Докажите, что *тензор Казимира*

$$\sum_i x_i \otimes e_i \in V^* \otimes V$$

не зависит от выбора базиса. Какому линейному оператору на V он соответствует?

Задача 1.11. Пусть операторы f и g при отождествлении $\mathrm{Hom}(V,V)$ с $V^* \otimes V$ записываются, соответственно, тензорами $\sum\limits_i \varphi_i \otimes u_i$ и $\sum\limits_j \psi_j \otimes v_i$. Проверьте, что их композицию $f \circ g$ можно записать в виде $\sum\limits_j \psi_j \otimes w_i$ и в виде $\sum\limits_i \eta_i \otimes u_i$, и получите явные выражения для w_j и η_i.

Задача 1.12. Постройте естественный линейный изоморфизм $\mathrm{Hom}(W,V) \longrightarrow \mathrm{Hom}(V,W)^*$. Укажите явно в терминах матриц, как вычислять значение оператора из $\mathrm{Hom}(W,V)$ как функционала на $\mathrm{Hom}(V,W)$.

Задача 1.13. Если в предыдущей задаче положить $W = V$, то получится корреляция

$$\mathrm{Hom}(V,V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V,V)^* .$$

Какой билинейной форме на $\mathrm{Hom}(V,V)$ она соответствует? Будет ли эта форма симметрической? Как она вычисляется в терминах матриц?

2.4.1. Тензорное произведение операторов. Пусть задан набор линейных операторов $V_i \xrightarrow{f_i} W_i$. Тогда существует единственный линейный оператор

$$V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n \xrightarrow{f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n} W_1 \otimes W_2 \otimes \cdots \otimes W_n ,$$

переводящий тензорные произведения векторов в тензорные произведения их образов:

$$f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n : \quad v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \longmapsto f_1(v_1) \otimes f_2(v_2) \otimes \cdots \otimes f_n(v_n)$$

(как и раньше, это следует из полилинейности отображения $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W_1 \otimes W_2 \otimes \cdots \otimes W_n$, переводящего $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ в $f_1(v_1) \otimes f_2(v_2) \otimes \cdots \otimes f_n(v_n)$). Оператор $f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n$ называется *тензорным произведением* операторов f_i.

Задача 1.14. Проверьте, что с учётом изоморфизма

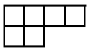
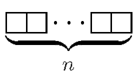
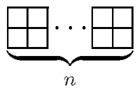
$$U_1^* \otimes U_2 \otimes V_1^* \otimes V_2 \simeq (U_1 \otimes V_1)^* \otimes (U_2 \otimes V_2) \simeq \mathrm{Hom}(U_1 \otimes V_1, U_2 \otimes V_2)$$

тензорное произведение операторов $U_1 \xrightarrow{f} U_2$ и $V_1 \xrightarrow{g} V_2$ есть не что иное как тензорным произведением соответствующих им тензоров из $U_1^* \otimes U_2$ и $V_1^* \otimes V_2$.

Задача 1.15. Пусть F — вложение, а Id — ненулевой тождественный оператор. Докажите, что $F \otimes \mathrm{Id}$ — вложение.

Задача 1.16. В стандартном базисе из зад.1.6 выразите матрицу тензорного произведения двух операторов $f: V \longrightarrow V$ и $g: W \longrightarrow W$ через матрицы f и g.

Задача 1.17. Пусть цикловой тип нильпотентного оператора $V \xrightarrow{F} V$ задаётся диаграммой Юнга

а)  **б)**  **в)**  .

Каков цикловой тип $f \otimes f$ и $f \otimes f \otimes f$?

Задача 1.18. Пусть операторы F и G диагонализуемы и имеют собственные числа $\{\lambda_i\}$ и $\{\mu\}$. Верно ли, что $F \otimes G$ диагонализуем? Каковы его собственные числа? Могут ли они быть кратными, если все собственные числа исходных операторов были однократны?

§3. Тензорная алгебра векторного пространства

3.1. Тензорные степени. Фиксируем до конца этого параграфа *одно* d-мерное пространство V. Произведение

$$V^{\otimes n} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{n}$$

называется *n-той тензорной степенью* пространства V. Под $V^{\otimes 0}$ всегда понимается одномерное пространство k.

Отметим, что прямая сумма $\mathsf{T}(V) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus\limits_{k \geqslant 0} V^{\otimes k}$ представляет собой ассоциативную некоммутативную алгебру над полем k (произведение индуцировано тензорным произведением векторов). Она называется *свободной ассоциативной алгеброй над k, порождённой пространством V.*

3.2. Свёртки. Рассмотрим произведение

$$\underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{p} \otimes \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{q}$$

и зафиксируем два подмножества индексов

$$I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset \{1, 2, \ldots, p\} \qquad J = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\} \subset \{1, 2, \ldots, q\}$$

одинаковой мощности $\# I = \# J = k$. Существует единственный линейный оператор

$$\underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{p} \otimes \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{q} \xrightarrow{c_{IJ}} \underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{p-k} \otimes \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{q-k},$$

который действует на разложимые тензоры по правилу

$$c_{IJ}(\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \cdots \otimes \varphi_p \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q) = \prod_{\nu=1}^{k} \varphi_{i_\nu}(v_{j_\nu}) \cdot \bigotimes_{i \notin I} \varphi_i \otimes \bigotimes_{j \notin J} v_j\,.$$

Этот оператор c_{IJ} называется *k-кратной свёрткой* по индексам из I и J.

Задача 1.19. Проверьте корректность определения c_{IJ} и опишите его действие в координатах.

3.2.1. Свёртка произведения векторов с полилинейной формой. Если, следуя n° 2.3, интерпретировать $V^{*\otimes p}$ или как пространство полилинейных форм на V, то свёртку можно воспринимать как отображение, которое переводит тензорное произведение

$$\psi \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q$$

p-линейной формы $\psi = \psi(w_1, w_2, \ldots, w_p)$ на разложимый тензор из $V^{\otimes q}$ в тензорное произведение вида

$$\widetilde{\psi} \otimes \widetilde{v}\,,$$

в котором $\widetilde{\psi}$ получается из ψ фиксацией векторов v_{j_ν} с $j_\nu \in J$ в качестве аргументов с номерами $i_\nu \in I$ и представляет собой полилинейную форму от остальных $(p-k)$ аргументов, а $\widetilde{v}$ получается из $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q$ выкидыванием всех этих v_{j_ν}, «переехавших» в зафиксированные аргументы формы ψ.

Задача 1.20. Убедитесь, что свёртки по непересекающимся множествам индексов перестановочны.

Свёртки часто возникают в двух своих крайних проявлениях.

3.2.2. Полная свёртка соответствует случаю $p = q = n$, $I = J = \{1, 2, \cdots, n\}$ и обозначается

$$\langle\, \tau\,,\, t\,\rangle \overset{\text{def}}{=} c_{\{1,2,\cdots,n\}\{1,2,\cdots,n\}}(\tau \otimes t) \quad \text{, где} \quad \tau \in V^{*\otimes n}\,,\; t \in V^{\otimes n}\,.$$

Она задаёт каноническую двойственность между пространствами $V^{*\otimes n}$ и $V^{\otimes n}$ и уже обсуждалась нами в 2-1.

Задача 1.21. Опишите полную свёртку в $V^* \otimes V$ на языке линейных операторов.

3.2.3. Внутреннее произведение. Если $p = 1$, а q — любое, и $I = J = \{1\}$, то свёртка называется *внутренним произведением* вектора $v \in V$ и полилинейной формы $\varphi \in V^{*\otimes n}$. Она обозначается

$$V^{*\otimes n} \xrightarrow{\;i_v\;} V^{*\otimes(n-1)}\;: \quad \varphi \longmapsto i_v(\varphi) \overset{\text{def}}{=} c_{11}(v \otimes \varphi)\,,$$

и представляет собой фиксацию вектора v в качестве первого аргумента формы φ.

Двойственным образом, при $q = 1$ и любом p возникает свёртка ковектора $\xi \in V^*$ и полилинейной формы $t \in V^{\otimes n}$ на V^*:

$$V^{\otimes n} \xrightarrow{\;i_\xi\;} V^{\otimes(n-1)}\;: \quad t \longmapsto i_\xi(t) \overset{\text{def}}{=} c_{11}(\xi \otimes t)\,.$$

3.3. Утверждение. *Пусть $\xi \in V^*$ — фиксированный ковектор. Операторы*

$$\begin{array}{llllll}
V^{\otimes n} & \xrightarrow{\;i_\xi\;} & V^{\otimes(n-1)}: & v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n & \longmapsto & \langle\, \xi\,,\, v_1\,\rangle\, v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \\
V^{*\otimes n} & \xleftarrow{\;\mu_\xi\;} & V^{\otimes(n-1)}: & \zeta_1 \otimes \zeta_2 \otimes \cdots \otimes \zeta_{n-1} & \longmapsto & \xi \otimes \zeta_1 \otimes \zeta_2 \otimes \cdots \otimes \zeta_{n-1}
\end{array}$$

внутреннего и левого тензорного умножения на ξ двойственны друг другу относительно канонического спаривания между $V^{\otimes n}$ и $V^{*\otimes n}$, индуцированного полной свёрткой.

Доказательство. Это получается прямо из определений:

$$\begin{aligned}
\langle\, \mu_\xi\,(\zeta_1 \otimes \zeta_2 \otimes \cdots \otimes \zeta_{n-1})\,,\, v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n\,\rangle &= \\
= \langle\, \xi\,,\, v_1\,\rangle\,\langle\, \zeta_1\,,\, v_2\,\rangle \cdots \langle\, \zeta_{n-1}\,,\, v_n\,\rangle &= \\
= \langle\, \zeta_1 \otimes \zeta_2 \otimes \cdots \otimes \zeta_{n-1}\,,\, i_\xi(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n)\,\rangle & \quad \square
\end{aligned}$$

Задача 1.22. Сформулируйте и докажите двойственный вариант этого утверждения, а также его обобщения на свёртки по большему количеству индексов.

3.4. Действие симметрической группы на $\mathbf{V}^{\otimes\mathbf{n}}$. Каждой перестановке $\sigma \in S_n$ соответствует единственный линейный автоморфизм $V^{\otimes n} \xrightarrow{\sigma} V^{\otimes n}$, действующий на разложимые тензоры по правилу

$$\sigma(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)} ,$$

т. е. попросту переставляющий сомножители.

Задача 1.23. Докажите, что таким образом возникает линейное представление группы S_n на $V^{\otimes n}$.

Канонически двойственное (в смысле полной свёртки) к только что рассмотренному действие $\mathfrak{S}_n$ на $V^{*\otimes n}$ происходит посредством обратных перестановок, поскольку $\langle \xi , \sigma(t) \rangle = \langle \sigma^{-1}(\xi) , t \rangle$, т. к.

$$\prod_i \langle \xi_i , t_{\sigma(i)} \rangle = \prod_j \langle \xi_{\sigma^{-1}(j)} , t_j \rangle$$

В частности действие $\mathfrak{S}_n$ на полилинейную форму φ происходит по правилу

$$\sigma\varphi\,(v_1, v_2, \dots, v_n) = \varphi(v_{\sigma^{-1}(1)}, v_{\sigma^{-1}(2)}, \dots , v_{\sigma^{-1}(n)})$$

и сводится к перестановке аргументов.

§4. Симметрические тензоры.

Всюду в этом параграфе предполагается, что характеристика основного поля k равна нулю.

4.1. Симметричные тензоры и симметричные полилинейные формы. Тензор $t \in V^{\otimes n}$ называется *симметрическим*, если $\sigma(t) = t \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$ относительно естественного действия $\mathfrak{S}_n$ на $V^{\otimes n}$, описанного в n° 3.4. Аналогично, полилинейное отображение $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\varphi} W$ называется *симметричным*, если

$$\varphi(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots , v_{\sigma(n)}) = \varphi(v_1, v_2, \dots , v_n) \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$$

Задача 1.24. Докажите, что симметричность полилинейного отображения φ равносильна тому, что значение $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$ не изменяется при перестановке

а) любой пары аргументов v_i и v_j

б) любой пары *соседних* аргументов v_i

причём эти условия достаточно проверять только на базисных векторах.

Задача 1.25. Убедитесь, что любая композиция $f \circ \varphi$, где f – линейный оператор, а φ – полилинейное симметричное отображение, является полилинейным симметричным отображением.

Симметрические тензоры в $V^{\otimes n}$ составляют подпространство, называемое пространством *симметрических тензоров степени n над V*. Полная свёртка отождествляет его с пространством симметричных n-линейных форм на $V^* \times V^* \times \cdots \times V^* \longrightarrow k$. Как правило, мы не будем делать разницы между этими пространствами, и будем обозначать их одинаково: $\mathsf{Sym}^n(V)$.

Задача 1.26. Постройте канонический изоморфизм между пространством полилинейных симметричных отображений из $V \times V \times \cdots \times V$ в W и $\mathsf{Sym}^n(V^*) \otimes W$.

Задача 1.27. Убедитесь, что тензорная степень $f^{\otimes n} \overset{\text{def}}{=} \underbrace{f \otimes f \otimes \cdots \otimes f}_{n}$ любого линейного оператора $V \xrightarrow{f} V$ переводит подпространство $\mathsf{Sym}^n(V) \subset V^{\otimes n}$ в себя.

4.2. Стандартный базис симметрических тензоров. Для произвольного набора неотрицательных целых чисел $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_d)$ с суммой $|\nu| = \sum \nu_i = n$ обозначим через $e^{[\nu]}$ сумму всех разложимых тензоров, являющихся произведением ν_1 векторов e_1, ν_2 векторов e_2, …, ν_d векторов e_d, т. е. сложим все базисные разложимые тензоры, составляющие одну орбиту симметрической группы.

Задача 1.28. Сколько слагаемых будет в этой сумме?

Поскольку в разложение симметрического тензора по базису $e^{(1)}_{\alpha_1} \otimes e^{(2)}_{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes e^{(n)}_{\alpha_n}$ вместе с каждым базисным тензором войдут (с теми же коэффициентами) и все тензоры, получающиеся из него перестановками, суммы $e^{[\nu]}$ составляют базис в $\mathsf{Sym}^n(V)$. В частности,

$$\dim \mathsf{Sym}^n(V) = C^n_{n+d-1}$$

(число способов разбить d в сумму n упорядоченных целых неотрицательных слагаемых).

4.3. Поляризация однородных полиномов. Функция $F: V \longrightarrow k$ называется *однородным полиномом n-той степени*, если в некотором базисе $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$ значение $F(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_de_d)$ является однородным многочленом степени n от переменных x_i. Совокупность всех однородных полиномов n-той степени мы будем обозначать через $\mathsf{Pol}^n(V)$

Задача 1.29. Докажите, что свойство функции быть однородным полиномом n-той степени не зависит от выбора базиса.

Задача 1.30. Докажите, что $\mathsf{Pol}^n(V)$ является векторным пространством, и вычислите его размерность.

4.3.1. Теорема. *Отображение $\mathsf{Sym}^n(V^*) \xrightarrow{res_\Delta} \mathsf{Pol}^n$, сопоставляющее симметричной полилинейной полилинейной форме $\varphi \in \mathsf{Sym}^n(V^*)$ её ограничения на диагональ в $V \times V \times \cdots \times V$, т. е. функцию $V \xrightarrow{\varphi_\Delta} k$: $\varphi_\Delta(v) \overset{\text{def}}{=} \varphi(v, v, \dots, v)$, является изоморфизмом векторных пространств (при $\operatorname{char} k = 0$).*

Доказательство. Фиксируем в V базис $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$ с координатами $\{x_1, x_2, \dots, x_d\}$, составляющими двойственный базис в V^*. Для каждого $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_d)$ с $\sum \nu_i = n$ образуем симметричный тензор $x^{[\nu]}$, равный сумме всех различных произведений ν_1 ковекторов x_1, ν_2 ковекторов x_2, …, ν_d ковекторов x_d. Согласно n°4.2 эти тензоры составляют базис в $\mathsf{Sym}^n(V^*)$. При ограничении на диагональ каждое слагаемое $x^{[\nu]}$ превратится в одночлен $x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_d^{\nu_d}$. С учётом общего количества слагаемых в $e^{[\nu]}$, получаем

$$x^{[\nu]}_\Delta = \frac{n!}{\nu_1!\,\nu_2! \cdots \nu_d!}\, x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_d^{\nu_d} ,$$

т. е. с точностью до ненулевых натуральных множителей образами стандартных базисных симметричных форм из$\mathsf{Sym}^n(V)$ являются базисные мономы в $\mathsf{Pol}^n(V)$. □

4.3.2. Определение. *Единственная симметричная полилинейная форма, ограничение которой на диагональ совпадает с заданным однородным полиномом n-той степени F называется полной поляризацией многочлена F и обозначается $\operatorname{pl}^n F$.*

Задача 1.31. Какой операции на полиномах соответствует операция внутреннего произведения полилинейной формы с данным вектором $v \in V$?

Задача 1.32. Проверьте, что если F – квадратичная форма (т. е. однородный полином второй степени), то

$$\mathrm{pl}^2 F(v,w) = \frac{1}{2}(F(v+w) - F(v) - F(w))\ ,$$

и попробуйте придумать похожую формулу для поляризации кубической формы.

4.3.3. Поляры. Пусть F — полином степени n на V, а $\varphi = \mathrm{pl}^n F \in \mathsf{Sym}^n(V^*)$ – его полная поляризация. Для произвольного набора векторов $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset V$ свёртка φ с $v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_k$ по первым k индексам является симметрическим тензором из $\mathsf{Sym}^{n-k}(V^*)$. Его ограничение на диагональ называется *k-той полярой F относительно векторов* $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ и обозначается $\mathrm{pl}^k_{v_1,v_2,\dots,v_k} F \in \mathsf{Pol}^{n-k}(V)$.

Для первых поляр обычно вместо pl^1 пишут просто pl. Если же набор векторов состоит из k экземпляров одного и того же вектора v, то пишут pl^k_v и называют такую поляру k-той полярой F относительно v.

Задача 1.33. Докажите следующие свойства поляр

а) Отображение $(v, F) \longmapsto \mathrm{pl}_v F$ билинейно по v и F.

б) $\mathrm{pl}_v \circ \mathrm{pl}_w = \mathrm{pl}_w \circ \mathrm{pl}_v = \mathrm{pl}^2_{vw} = \mathrm{pl}^2_{wv}$.

в) $\mathrm{pl}^n_v F = F(v) \in k$.

г) Если $(x_1, x_2, \dots, x_d)$ и $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$ – двойственные базисы в V^* и в V соответственно, и $v = \sum v_i e_i$, то $\mathrm{pl}_v F = \dfrac{1}{\deg F}\dfrac{\partial F}{\partial v} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{d} v_i \dfrac{\partial F}{\partial x_i}$.

Из последней задачи следует, во-первых, что операция дифференцирования в направлении вектора *естественна* (или *ковариантна*) в том смысле, что $\partial F/\partial v$ зависит только от F и v, но не от выбора базиса. Во-вторых, мы получаем, что полная поляризация однородного многочлена F степени n от переменных $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ может быть получена формальным дифференцированием по правилу

$$\mathrm{pl}^n F(\, v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(1)}\,) = \frac{1}{n!}\sum_{i_1=1}^{d} v^{(1)}_{i_1}\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \sum_{i_2=1}^{d} v^{(2)}_{i_2}\frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \ \cdots \ \sum_{i_n=1}^{d} v^{(n)}_{n}\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} F(x)\ ,$$

где $v^{(i)} = (v^{(i)}_1, v^{(i)}_2, \dots, v^{(i)}_d)$ суть новые n наборов d-мерных переменных, от которых (полилинейно и симметрично) зависит форма $\mathrm{pl}^n F$.

Задача 1.34. Пользуясь свойствами поляр, разложите оператор $\mathrm{pl}^k_{u+v} = (\mathrm{pl}_u + \mathrm{pl}_v)^n$ по формуле бинома и докажите *формулу Тэйлора*: $F(v+w) = \sum\limits_{k=0}^{\deg F}\dfrac{1}{k!}\dfrac{\partial^k F}{\partial v^k}(w) \quad \forall F \in \mathsf{Pol}^n(V)$.

4.4. Симметрическая двойственность. Рассмотрим ограничение канонического спаривания между $V^{\otimes n}$ и $V^{*\otimes n}$, индуцированного полной свёрткой, на подпространства симметрических тензоров $\mathsf{Sym}^n(V) \subset V^{\otimes n}$ и $\mathsf{Sym}^n(V^*) \subset V^{*\otimes n}$. Пусть $\{e^{[\nu]}\}$ и $\{x^{[\nu]}\}$ – стандартные базисы из n° 4.2, ассоциированные с парой двойственных базисов $\{e_1, e_2, \dots, e_d\} \subset V$ и $\{x_1, x_2, \dots, x_d\} \subset V^*$.

Каждое слагаемое тензора $e^{[\nu]}$ аннулируют при свёртке любое слагаемое произвольного $e^{[\mu]}$ с $\mu \neq \nu$:

$$\left\langle\, e^{[\mu]}\,,\, e^{[\nu]}\,\right\rangle = 0\ , \quad \text{при} \quad \mu \neq \nu$$

При $\mu = \nu$ каждое из $\dfrac{n!}{\nu_1!\,\nu_2!\,\cdots\,\nu_d!}$ слагаемых $e^{[\nu]}$ сворачивается ненулевым образом ровно с одним слагаемым[3] из $x^{[\nu]}$, и эта нетривиальная свёртка равна 1. В результате

$$\left\langle\, e^{[\nu]}\,,\, x^{[\nu]}\,\right\rangle = \frac{n!}{\nu_1!\,\nu_2!\,\cdots\,\nu_d!}\,.$$

мы получаем

4.4.1. Утверждение. *Над полем характеристики нуль полная свёртка задаёт каноническую двойственность между* $\mathsf{Sym}^n(V)$ *и* $\mathsf{Sym}^n(V^*)$. *При этом двойственным к базису* $\{e^{[\nu]}\} \subset \mathsf{Sym}^n(V)$ *будет базис* $\left\{\dfrac{n!}{\nu_1!\,\nu_2!\,\cdots\,\nu_d!}\,x^{[\nu]}\right\} \subset \mathsf{Sym}^n(V^*)$. □

4.5. Принцип Аронгольда. Двойственным в смысле Утв.4.4.1 фактом к Теор.4.3.1 является следующая

4.5.1. Теорема. *Над полем характеристики нуль пространство симметрических тензоров* $\mathsf{Sym}^n(V) \subset V^{\otimes n}$ *линейно порождается чистыми* n*-тыми степенями векторов из* V, *т. е. тензорами вида* $v^{\otimes n} = \underbrace{v \otimes v \otimes\,\cdots\,\otimes v}_{n}$.

Доказательство. Проверим, что любой линейный функционал на $\mathsf{Sym}^n(V)$, который обращается в нуль на всех чистых степенях, равен нулю тождественно. По Утв.4.4.1 всякий функционал на $\mathsf{Sym}^n(V)$ представляет собой полную свёртку с симметричной полилинейной формой $\varphi \in \mathsf{Sym}^n(V^*)$, и его значение на чистой тензорной степени $v^{\otimes n}$ есть не что иное как многочлен $\varphi_\Delta(v)$. Но над бесконечным только нулевой многочлен может принимать нулевые значения во всех точках. Поэтому $\varphi_\Delta = 0$, а значит и $\varphi = 0$. □

Задача 1.35. Представьте в виде линейной комбинации тензорных степеней следующие симметрические тензоры

а) $v \otimes w + w \otimes v$

б) $u \otimes v \otimes w + v \otimes w \otimes u + w \otimes u \otimes v - v \otimes u \otimes w - u \otimes w \otimes v - w \otimes v \otimes u$.

Практическим следствием доказанной теоремы является *принцип Аронгольда*: всякое *полилинейное* соотношение между симметрическими тензорами (или однородными многочленами) достаточно проверять только на тензорах вида $v^{\otimes n}$ (или, соответственно, на многочленах вида $\ell(x)^n$, где $\ell(x)$ – линейная форма). Другим важным следствием является

4.5.2. Следствие. *Над полем характеристики нуль векторное подпространство*

$$\mathrm{End}_{\mathfrak{S}_n}\left(V^{\otimes n}\right) \overset{\text{def}}{=} \left\{\, V^{\otimes n} \xrightarrow{\;F\;} V^{\otimes n} \mid F\sigma = \sigma F \;\;\forall\,\sigma\in\mathfrak{S}_n\,\right\} \subset \mathrm{End}\left(V^{\otimes n}\right)\;,$$

состоящее из всех тех линейных операторов, которые перестановочны с действием симметрической группы $\mathfrak{S}_n$, *линейно порождается операторами вида* $F = f^{\otimes n}$ *с* $f\in\mathrm{End}(V)$.

Доказательство. Перепишем $\mathrm{End}\left(V^{\otimes n}\right)$ в виде

$$\mathrm{End}\left(V^{\otimes n}\right) \simeq V^{*\otimes n} \otimes V^{\otimes n} \simeq \left(V^* \otimes V\right)^{\otimes n} \simeq \mathrm{End}(V)^{\otimes n}\,.$$

[3] тем, в котором сомножители x_i стоят в таком же порядке, как e_i

Действие симметрической группы на $\mathrm{End}\,(V^{\otimes n})$, заданное правилом $F \longmapsto \sigma F \sigma^{-1}$, в терминах $\mathrm{End}(V)^{\otimes n}$ представляет собой в точности перестановку сомножителей в разложимых тензорах. Операторы, инвариантные относительно этого действия – это в точности симметрические тензоры $\mathsf{Sym}^n\,(\mathrm{End}(V)) \subset \mathrm{End}(V)^{\otimes n}$. Как мы видели в Теор.4.5.1, пространство симметрических тензоров линейно порождается чистыми n-тыми степенями $F = f^{\otimes n}$ с $f \in \mathrm{End}(V)$. $\square$

4.6. Симметризация и симметрическое произведение. Линейный оператор

$$V^{\otimes n} \xrightarrow{\mathrm{sym}_n} V^{\otimes n} \quad : \quad t \longmapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma(t)\ , \tag{4-3}$$

называется *полной симметризацией* тензоров. Он тождественно действует на подпространстве симметрических тензорах и переводит произвольный тензор в симметрический. Тем самым, это проектор $V^{\otimes n}$ на $\mathsf{Sym}^n(V)$. Подчеркнём, что при $\mathrm{char}\,k > 0$ число $n!$ может оказаться делящимся на характеристику, и в этом случае симметризация будет аннулировать $\mathsf{Sym}^n(V)$!

Задача 1.36. Докажите, что канонически двойственным (в смысле полной свёртки) оператором к оператору $V^{\otimes n} \xrightarrow{\mathrm{sym}_n} V^{\otimes n}$ будет оператор $V^{*\otimes n} \xrightarrow{\mathrm{sym}_n} V^{*\otimes n}$.

Определим симметрическое произведение тензоров $t_1 \in \mathsf{Sym}^n(V)$ и $t_1 \in \mathsf{Sym}^n(V)$ связано с их тензорным произведением формулой

$$t_1 \cdot t_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{sym}_{m+n}(t_1 \otimes t_2) \in \mathsf{Sym}^{m+n}(V) \tag{4-4}$$

Задача 1.37. Как устроена полилинейная форма, равная симметрическому произведению двух данных симметрических полилинейных форм?

Задача 1.38. Докажите, что оператор *симметрического* умножения на вектор v:

$$\mathsf{Sym}^{n-1}(V) \xrightarrow{s_v} \mathsf{Sym}^n(V)$$

канонически двойственен (в смысле полной свёртки) оператору внутреннего умножения

$$\mathsf{Sym}^n(V^*) \xrightarrow{i_v} \mathsf{Sym}^{n-1}(V^*)\ .$$

(Эту задачу поучительно сопоставить с предыдущей Утв.3.3 и с Утв.5.4.1 ниже.)

Задача 1.39. Докажите, что симметрические умножения на векторы коммутативны и ассоциативны: $s_v s_w = s_w s_v$ и $s_u(s_v s_w) = (s_u s_v) s_w\ forall\, u, v, w \in V$.

Задача 1.40. Проверьте, что симметрическое произведение ν_1 базисных векторов e_1, ν_2 базисных векторов e_2, …, ν_d базисных векторов e_d равно $\dfrac{\nu_1!\,\nu_2!\,\cdots\,\nu_d!}{n!}\,e^{[\nu]}$ и что $e^{[\nu]}$ перемножаются по правилам: $e^{[\mu]} \cdot e^{[\nu]} = \frac{C^{\nu}_{\mu+\nu}}{C^{|\nu|}_{|\mu|+|\nu|}}\, e^{[\mu+\nu]}$, где

$$\mu + \nu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_d) + (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_d) = (\,(\mu_1 + \nu_1)\,,\,(\mu_2 + \nu_2)\,, \dots\ (\mu_d + \nu_d)\,)\ ,$$

а $C^{\nu}_{\mu+\nu} = C^{\nu_1}_{\mu_1+\nu_1} C^{\nu_2}_{\mu_2+\nu_2}\,, \cdots C^{\nu_d}_{\mu_d+\nu_d}$.

4.7. Алгебра симметрических тензоров. Бесконечномерное векторное пространство [4]

$$\mathsf{Sym}(V^*) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathsf{Sym}^n(V^*)$$

вместе с описанным выше симметрическим произведением тензоров называется *алгеброй симметрических тензоров*. Согласно предыдущим задачам, изоморфизмы ограничения на диагональ $\mathsf{Sym}^n(V^*) \xrightarrow{res_\Delta} \mathsf{Pol}^n$ канонически отождествляют её с алгеброй $\mathsf{Pol}(V) = \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathsf{Pol}^n(V)$ всех полиномиальных функций на V, которая, в свою очередь, тавтологически изоморфна алгебре многочленов $k[x_1, \dots, x_d]$ от координат (в произвольном базисе).

§5. Кососимметрические тензоры

Всюду в этом параграфе мы, как и в предыдущем, считаем, что характеристика основного поля k равна нулю.

5.1. Кососимметрические тензоры и кососимметричные полилинейные отображения. Тензор $t \in V^{\otimes n}$ называется *кососимметрическим*, если $\sigma(t) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$ относительно естественного действия $\mathfrak{S}_n$ на $V^{\otimes n}$, описанного в n° 3.4. Аналогично полилинейное отображение $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\varphi} W$ называется *кососимметричным*, если

$$\varphi(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\, \varphi(v_1, v_2, \dots, v_n) \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$$

Задача 1.41. Докажите, что кососимметричность полилинейного отображения φ (над полем любой характеристики) равносильна тому, что значение $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$ меняет знак при перестановке

а) любой пары аргументов v_i и v_j

б) любой пары *соседних* аргументов v_i

а над полем характеристики нуль — также и тому, что $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0$, когда среди аргументов есть одинаковые. Убедитесь также, что эти условия достаточно проверять только на базисных векторах.

Задача 1.42. Убедитесь, что любая композиция $f \circ \varphi$, где f – линейный оператор, а φ – полилинейное кососимметричное отображение, является полилинейным кососимметричным отображением.

Кососимметрические тензоры в $V^{\otimes n}$ составляют подпространство, называемое пространством *симметрических тензоров степени n над V*. Полная свёртка отождествляет его с пространством кососимметричных n-линейных форм на $V^* \times V^* \times \cdots \times V^* \to k$. Мы не делаем разницы между этими пространствами и обозначаем их одинаково: $\mathsf{Alt}^n(V)$.

Задача 1.43. Постройте канонический изоморфизм между пространством полилинейных кососимметричных отображений из $V \times V \times \cdots \times V$ в W и $\mathsf{Alt}^n(V^*) \otimes W$.

В разложение кососимметрического тензора t по стандартным базисным тензорам $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \in V^{\otimes n}$ не могут входить произведения, содержащие хоть одну пару одинаковых

[4] мы полагаем ниже $\mathsf{Sym}^0(V) \stackrel{\text{def}}{=} k$

сомножителей, поскольку любое такое произведение инвариантно относительно их транспозиции σ, что исключает возможность равенства $t = -\sigma(t)$. В частности, кососимметричных тензоров степени $n > d = \dim V$ не существует вообще.

5.2. Стандартный базис кососимметрических тензоров. Пусть в V выбран базис $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$. Для произвольного набора *строго возрастающих* натуральных чисел $I = \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subset \{1,\ 2,\ \dots\ ,\ d\}$ обозначим $e_{[I]}$ альтернированную сумму

$$e_{[I]} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot e_{i_{\sigma(1)}} \otimes e_{i_{\sigma(2)}} \otimes \dots \otimes e_{i_{\sigma(n)}} .$$

Задача 1.44. Сколько слагаемых будет в этой сумме?

Задача 1.45. Убедитесь, что тензоры $e_{[I]}$ с $\#I = n$ составляют базис в $\mathsf{Alt}^n(V)$.

Таким образом, $\dim \mathsf{Alt}^n(V) = C_d^{\text{e}}$ (т. е. количеству различных n-элементных подмножеств в d-элементном множестве). В частности, $\mathsf{Alt}^n(V) = 0$ при $n > d$.

Задача 1.46. Постройте естественный изоморфизм $\bigoplus\limits_{\alpha=0}^{n} \mathsf{Alt}^{\alpha}(U) \otimes \mathsf{Alt}^{n-\alpha}(V) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Alt}^n(U \oplus V)$.

Задача 1.47. Докажите, что если базисы $\{e_i\}$ и $\{e'_i\}$ в V связаны посредством матрицы перехода $(a_{ij}$, то элементы A_{IJ} матрицы перехода между базисами $\{e'_{[I]}\}$ и $\{e_{[J]}\}$ в $\mathsf{Alt}^n(V)$ будут IJ-минорами матрицы $(a_{ij}$.

5.3. Кососимметрическая двойственность. Вычислим как действует полная свёртку между $V^{\otimes n}$ и $V^{*\otimes n}$ на стандартные базисы $e_{[I]}$ и $x_{[I]}$ из n° 5.2, ассоциированные с парой двойственных базисов $\{e_1, e_2, \dots, e_d\} \subset V$ и $\{x_1, x_2, \dots, x_d\} \subset V^*$. При $I \neq J$ каждое слагаемое тензора $e_{[I]}$ аннулирует любое слагаемое $e_{[J]}$, а при $I = J$ каждое из $n!$ слагаемых $e_{[I]}$ имеет единичную свёртку с тем слагаемым из $x_{[I]}$, в котором сомножители x_i стоят в таком же порядке, как и e_i, и нулевую со всеми прочими. В результате

$$\left\langle\, e_{[I]}\,,\ x_{[J]} \,\right\rangle = n!\, \delta_{IJ} .$$

5.3.1. Следствие. *Полная свёртка между $V^{\otimes n}$ и $V^{*\otimes n}$ индуцирует каноническую двойственность между $\mathsf{Alt}^n(V)$ и $\mathsf{Alt}^n(V^*)$. При этом двойственным к базису $\{e_{[I]}\} \subset \mathsf{Alt}^n(V)$ будет базис $\left\{\dfrac{1}{n!}\, x_{[I]}\right\} \subset \mathsf{Alt}^n(V^*)$.* □

5.4. Альтернирование и произведения. Определим линейный оператор *полного альтернирования* тензоров формулой

$$V^{\otimes n} \xrightarrow{\ \text{alt}_n\ } V^{\otimes n} \quad : \qquad t \longmapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \sigma(t) , \tag{5-5}$$

Задача 1.48. Убедитесь, что alt_n является проектором $V^{\otimes n}$ на $\mathsf{Alt}^n(V)$ (т. е.тождественно действует на подпространстве кососимметричных тензоров и переводит произвольный тензор в кососимметрический).

Задача 1.49. Докажите, что канонически двойственным (в смысле полной свёртки) оператором к оператору $V^{\otimes n} \xrightarrow{\text{alt}_n} V^{\otimes n}$ будет оператор $V^{*\otimes n} \xrightarrow{\text{alt}_n} V^{*\otimes n}$.

Определим *внешнее произведение* кососимметрических тензоров $t_1 \in \mathsf{Alt}^n(V)$ и $t_1 \in \mathsf{Alt}^m(V)$ формулой

$$t_1 \wedge t_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{alt}_{m+n}(t_1 \otimes t_2) \in \mathsf{Alt}^{m+n}(V) \tag{5-6}$$

Задача 1.50. Как устроена кососимметрическая полилинейная форма, равная внешнему произведению двух данных кососимметрических полилинейных форм?

Наконец, отметим, что внутреннее произведение $V^{*\otimes n} \xrightarrow{i_v} V^{*\otimes(n-1)}$ переводит кососимметрические тензоры в кососимметрические, ибо при фиксации первого аргумента полилинейная кососимметричная форма продолжает таковой оставаться.

Задача 1.51. Поверьте, что $i_v \circ i_w = -i_w \circ i_v$.

5.4.1. Утверждение. *Пусть $\xi \in V^*$ — фиксированный ковектор. Операторы*

$$Alt^n(V) \xrightarrow{i_\xi} Alt^{n-1}(V) \qquad \text{и} \qquad Alt^{n-1}(V^*) \xrightarrow{\lambda_\xi} Alt^n(V^*)$$

внутреннего и левого внешнего умножения на ξ двойственны друг другу в смысле Сл.5.3.1

Доказательство. Поскольку двойственным к внутреннему умножению на ξ оператором из $V^{*\otimes(n-1)}$ в $V^{*\otimes n}$ является согласно Утв.3.3 оператор μ_ξ левого тензорного умножения на ξ, находим $\lambda_\xi^* = (\mathrm{alt}_n \circ \mu_\xi)^* = \mu_\xi^* \circ \mathrm{alt}_n^* = i_\xi \circ \mathrm{alt}_n = i_\xi$. □

Задача 1.52. Проверьте, что внешние произведения на векторы антикоммутируют $\lambda_v \circ \lambda_w = -\lambda_w \circ \lambda_v$ и выведите из этого, что для любых $t_1 \in \mathsf{Alt}^n(V)$ и $t_1 \in \mathsf{Alt}^m(V)$

$$t_1 \wedge t_2 = (-1)^{mn} t_2 \wedge t_1$$

(это свойство одно время было модно называть *суперкоммутативностью*.

Задача 1.53. Проверьте, что $e_{i1} \wedge e_{i2} \wedge \cdots \wedge e_{in} = \dfrac{1}{n!} e_{\{i_1, i_2, \dots, i_n\}}$ при $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$ и напишите таблицу умножения базисных кососимметричных тензоров.

Задача 1.54. Докажите, что длинные последовательности линейных операторов

$$0 \to \mathsf{Alt}^n(V^*) \xrightarrow{i_v} \mathsf{Alt}^{n-1}(V^*) \xrightarrow{i_v} \cdots \xrightarrow{i_v} \mathsf{Alt}^2(V^*) \xrightarrow{i_v} \mathsf{Alt}^1(V^*) \xrightarrow{i_v} \mathsf{Alt}^0(V^*) \to 0$$

$$0 \to \mathsf{Alt}^0(V) \xrightarrow{v\wedge\cdot} \mathsf{Alt}^1(V) \xrightarrow{v\wedge\cdot} \mathsf{Alt}^2(V) \xrightarrow{v\wedge\cdot} \cdots \xrightarrow{v\wedge\cdot} \mathsf{Alt}^{n-1}(V) \xrightarrow{v\wedge\cdot} \mathsf{Alt}^n(V) \to 0$$

точны (т. е. образ каждой стрелки совпадает с ядром следующей).

5.4.2. Алгебра кососимметрических тензоров. Как и в симметричном случае, беря прямую сумму $\mathsf{Alt}(V) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{n=0}^{d} \mathsf{Alt}^n(V$ (где опять под $\mathsf{Alt}^0(V)$ понимается основное поле k) мы получим ассоциативную, но на этот раз *суперкоммутативную* и *конечномерную* k-алгебру. Эта алгебра называется *алгеброй кососимметрических тензоров* пространства V).

5.4.3. Форма объёма. Пространство кососимметрических форм максимально возможной степени $\mathsf{Alt}^d(V^*)$ одномерно, и выбор базиса $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$ в V индуцирует стандартную базисную форму $\omega_e = x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_d$ в этом пространстве. Эта форма называется *формой ориентированного объёма*, ассоциированной с базисом e.

Задача 1.55. Убедитесь, что при выборе другого базиса в V форма объёма делится на определитель матрицы перехода.

Таким образом группа всех замен базисов в V, не изменяющих форму объёма, — это *специальная линейная группа* SL_d матриц с определителем 1.