Лекция 2
Симметрическая и внешняя алгебры

▷Симметрическая алгебра, алгебра многочленов и алгебра симметрических тензоров ▷Симметрические степени линейного оператора ▷Внешняя алгебра, грассмановы многочлены и кососимметрические тензоры ▷Соотношения Лапласа ▷Внешние степени линейного оператора ▷Разложимые поливекторы и соотношения Плюккера ▷Комплексы ДеРама и Кошуля

§1. Симметрическая алгебра векторного пространства

В этом параграфе мы дадим основанное на использовании тензорной алгебры $\mathcal{T}(V^*)$ «бескоординатное» определение алгебры полиномиальных функций на данном векторном пространстве V над любым полем.

1.1. Симметризующие соотношения. Обозначим через $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}(V)$ двусторонний идеал, порождённый подпространством $\mathcal{S}_2 \subset V \otimes V \subset \mathcal{T}(V)$, которое по определению представляет собой линейную оболочку всевозможных тензоров вида

$$v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1 \quad , \qquad v_1,\, v_2 \in V\ .$$

Как векторное пространство идеал $\mathcal{S}$ является прямой суммой своих однородных компонент

$$\mathcal{S}_n \overset{\text{def}}{=} \mathcal{S} \cap V^{\otimes n} \subset V^{\otimes n}\ .$$

Подпространство $\mathcal{S}_n$ линейно порождается всевозможными тензорами вида

$$\begin{aligned} \cdots \otimes v_{i-1} \otimes v_i \otimes v_{i+1} \otimes v_{i+2} \otimes \cdots \quad - \quad \cdots \otimes v_{i-1} \otimes v_{i+1} \otimes v_i \otimes v_{i+2} \otimes \cdots \quad = \\ = \quad \cdots \otimes v_{i-1} \otimes \left(v_i \otimes v_j - \otimes v_j \otimes v_i\right) \otimes v_{i+2} \otimes \cdots \end{aligned} \tag{1-1}$$

(соответственные сомножители, обозначенные многоточиями, одинаковы во всех трёх произведениях).

Задача 2.1. Докажите, что в $\mathcal{S}_n$ содержатся все тензоры вида

$$t - \sigma(t)\ , \quad \text{где} \quad t \in V^{\otimes n}\ ,\ \sigma \in \mathfrak{S}_n\ ,$$

1.2. Определение. *Фактор-алгебра* $S(V) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{T}(V)/\mathcal{S} = \bigoplus\limits_{n\geqslant 0} \left(V^{\otimes n}/\mathcal{S}_n\right)$ *называется симметрической алгеброй пространства V, а её однородные компоненты $S^nV = V^{\otimes n}/\mathcal{S}_n$ называются симметрическими степенями пространства V.*

1.2.1. Свойства умножения. Умножение в симметрической алгебре по построению *коммутативно*. Оно обозначается точкой (или никак не обозначается). Произведения вида $v_1^{m_1} v_2^{m_2} \cdots v_d^{m_d}$, т. е. результаты приведения по модулю $\mathcal{S}$ разложимых тензоров, представляющих собой тензорное произведение m_1 векторов v_1, m_2 векторов v_2, …, m_d векторов v_d (всё равно в каком порядке) линейно порождают n-тую симметрическую степень S^nV

1.3. Универсальность симметрических степеней. Отображение

$$\begin{aligned} V \times V \times \cdots \times V &\xrightarrow{\mathfrak{s}_n} S^n \\ (v_1, v_2, \ldots, v_n) &\xmapsto{\mathfrak{s}_n} v_1 \cdot v_2 \cdot \cdots \cdot v_n \end{aligned}$$

полилинейно, симметрично и универсально в следующем смысле.

1.3.1. Лемма. *Для любого пространства W отображение $\mathrm{Hom}(S^nV, W) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Sym}^n(V^*) \otimes W$, переводящее линейный оператор $S^nV \xrightarrow{f} W$ в композицию $V \times V \times \cdots \times V \xrightarrow{f \circ \mathfrak{s}_n} W$, устанавливает канонический изоморфизм пространства линейных операторов из S^nV в W с пространством полилинейных симметричных отображений $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to W$.*

Доказательство. Любое полилинейное отображение $V \times V \times \cdots \times V \xrightarrow{\varphi} W$ единственным образом пропускается через n-тую тензорную степень:

$$\begin{tikzcd} & V^{\otimes n} \arrow[dr, "\mathfrak{s}_n"] \arrow[dd, dashed, "\widetilde{\varphi}"] & \\ V \times V \times \cdots \times V \arrow[ur, "\tau_n"] \arrow[rr, "\mathfrak{s}_n"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & V^{\otimes n}/\mathcal{S}_n \arrow[dl, dotted, "\overline{\varphi}"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

Симметричность φ равносильна тому, что все тензоры вида (1-1) лежат в ядре $\widetilde{\varphi}$, ибо

$$\begin{aligned} &\widetilde{\varphi}(\cdots \otimes v_i \otimes v_j \otimes \cdots - \cdots \otimes v_j \otimes v_i \otimes \cdots) = \\ &\qquad \widetilde{\varphi}(\cdots \otimes v_i \otimes v_j \otimes \cdots) - \widetilde{\varphi}(\cdots \otimes v_i \otimes v_j \otimes \cdots) = \\ &\qquad\qquad = \varphi(\ldots, v_i, v_j, \cdots) - \varphi(\ldots, v_j, v_i, \cdots) = 0 , \end{aligned}$$

поэтому линейный оператор $\widetilde{\varphi}$ пропускается через факторизацию по $\mathcal{S}_n$, т. е. $\widetilde{\varphi} = f \circ \mathfrak{s}_n$ для некоторого линейного оператора f. Единственность φ вытекает из того, что $V^{\otimes n}/\mathcal{S}_n$ порождается образами разложимых тензоров $t = v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n$, а их $\overline{\varphi}$ обязан переводить в $\varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. □

Задача 2.2. Докажите, что симметрическая степень S^nV определяется условиями леммы однозначно с точностью до единственного изоморфизма. перестановочного с $\mathfrak{s}_n$.

1.4. Базис симметрической алгебры. Пусть векторы $e_1, e_2, \ldots, e_d$ составляют базис в пространстве V. Рассмотрим пространство W однородных многочленов степени n от d переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d$ и отображение $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\varphi} W$, переводящее n-ку векторов $v_i = \sum \alpha_{ij} e_j$ в произведение n линейных форм от ξ:

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) \longmapsto \prod_i \left(\sum_j \alpha_{ij} \xi_j \right) ,$$

полученных заменой базисных векторов e_ν на соответствующие переменные ξ_ν. Это отображение полилинейно и симметрично, а значит, пропускается через S^nV. Симметрические произведения базисных векторов $e_1^{m_1}e_2^{m_2}\,\cdots\,e_d^{m_d}$, порождающие S^nV, при этом будут переходить в (линейно независимые по определению) базисные мономы $\xi_1^{m_1}\xi_2^{m_2}\,\cdots\,\xi_d^{m_d}\in W$. Тем самым, произведения

$$e_1^{m_1}e_2^{m_2}\,\cdots\,e_d^{m_d}$$

составляют базис в S^nV.

Задача 2.3. Убедитесь, что построенные только что отображения в действительности устанавливают *изоморфизм алгебр* $S(V)\xrightarrow{\sim}k[e_1,\dots,e_d]$, а не только векторных пространств.

Иначе говоря, понятие симметрической алгебры есть не что иное как «бескоординатная» версия понятия алгебры многочленов, и последняя получается из первой спецификацией базиса в пространстве V.

1.5. Симметрическая алгебра и полиномиальные функции. Всякий многочлен $f(x)\in k[x_1,\dots,x_d]$ задаёт полиномиальную функцию на пространстве V. Эта функция сопоставляет вектору $v=\sum\alpha_ie_i$ число $f(\alpha)\in k$. На бескоординатном языке, всякий элемент $\varphi\in S^n(V^*)$ задаёт на V функцию, сопоставляющую вектору $v\in V$ число из k, равное полной свёртке $v^{\otimes n}$ с любым тензором $t\in V^{*\otimes n}$, который сравним с φ по модулю $\mathcal{S}_n$.

Задача 2.4. Убедитесь, что результат свёртки не зависит от выбора тензора t, поднимающего φ из S^nV в $V^{\otimes n}$, и что получающаяся функция является полиномиальной.

Такое сопоставление элементам $S(V^*)$ полиномиальных функций на V является, очевидно, эпиморфизмом алгебры $S(V^*)$ на алгебру $\mathsf{Pol}(V)$. Этот эпиморфизм инъективен тогда и только тогда, когда основное поле *бесконечно*.

Задача 2.5. Приведите над конечным полем пример двух различных симметрических тензоров, задающих одинаковые функции на V.

Задача 2.6. Докажите, что над бесконечным полем алгебра $S(V^*)$ изоморфна алгебре полиномиальных функций на V.

1.6. Двойственность между $S^n(V)$ и $S^n(V^*)$. Ограничение симметричных полилинейных форм на диагональ $\mathsf{Sym}^n(V^*)\xrightarrow{res_\Delta}\mathsf{Pol}^n(V)$, переводящее форму $\varphi(v_1,v_2,\dots,v_n)$ функцию $\varphi_\Delta(v)=\varphi(v,v,\,\dots\,,v)$, после канонических отождествлений $\mathsf{Sym}^n(V^*)\simeq(S^nV)^*$ (универсальность симметрической степени) и $\mathsf{Pol}^n(V)\simeq S^n(V^*)$ (сопоставление многочлену полиномиальной функции) индуцирует отображение

$$(S^nV)^*\to S^n(V^*)\ ,$$

которое, как мы видели в прошлой лекции, является изоморфизмом над полем характеристики нуль. Таким образом, при $\operatorname{char}k=0$ между пространствами $S^n(V^*)$ с (S^nV) имеется *каноническая двойственность*, спаривающая стандартные базисные мономы по формуле

$$\left\langle\, e_1^{\mu_1}e_2^{\mu_2}\,\cdots\,e_d^{\mu_d}\ ,\ x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}\,\cdots\,x_d^{\mu_d}\,\right\rangle=\frac{(\mu_1+\mu_2+\,\cdots\,+\mu_d)!}{\mu_1!\,\mu_2!\,\cdots\,\mu_d!}\ ,$$

и $\left\langle\, e^{[\mu]}\,,\ x^{[\nu]}\,\right\rangle=0$ при $[\mu]\neq[\nu]$.

Задача 2.7. Покажите, что при $\operatorname{char}k=p|n$ оператор ограничения n-формы на диагональ не является ни мономорфным ни эпиморфным.

1.7. Симметрическая алгебра и симметрические тензоры. Над полем характеристики нуль ограничение проекции $V^{\otimes n} \xrightarrow{\mathfrak{s}_n} S^nV$ на подпространство симметрических тензоров $\mathsf{Sym}^n(V) \subset \mathcal{T}^n(V)$ переводит стандартный базис $e^{[\nu]} \in \mathsf{Sym}^n(V)$ в

$$\mathfrak{s}_n(e^{[\nu]}) = \frac{n!}{\nu_1!\,\nu_2!\,\cdots\,\nu_d!}\,e_1^{\nu_1}e_2^{\nu_2}\,\cdots\,e_d^{\nu_d}$$

и следовательно, индуцирует канонический изоморфизм $\mathsf{Sym}^nV \xrightarrow{\sim} S^nV$. Более того, т. к. оператор полной симметризации

$$V^{\otimes n} \xrightarrow{\mathrm{sym}_n} \mathsf{Sym}^n(V) \quad : \qquad t \longmapsto \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sigma(t)\,,$$

переводит всякий тензор t в тензор, который сравним с t по модулю $\mathcal{S}_n$, поскольку

$$t - \mathrm{sym}_n(t) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\Big(t-\sigma(t)\Big) \in \mathcal{S}_n\,,$$

имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
V^{\otimes n} \arrow[r, "\mathrm{sym}_n"] \arrow[dr, "\mathfrak{s}_n"'] & \mathsf{Sym}^n(V) \arrow[r, hook] \arrow[d] & V^{\otimes n} \arrow[dl, "\mathfrak{s}_n"] \\
 & S^nV &
\end{tikzcd}$$

Задача 2.8. Убедитесь, что с учётом канонического отождествления $S^nV^* \simeq \mathsf{Pol}^n(V)$ (сопоставление многочлену полиномиальной функции) проекция $\mathsf{Sym}^n(V^*) \xrightarrow{\mathfrak{s}_n} S^nV^*$ есть не что иное как ограничение полиномиальной формы на диагональ.

Задача 2.9. Убедитесь, что над полем характеристики нуль проекция $\mathsf{Sym}(V) \xrightarrow{\oplus\mathfrak{s}_n} S(V)$ является изоморфизмом алгебр (алгебра симметрических тензоров рассматривается с определённым на прошлой лекции *симметрическим произведением*, равным симметризации тензорного).

1.8. Симметрические степени линейного оператора. Поскольку тензорная степень $f^{\otimes n} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{f\otimes f\otimes\cdots\otimes f}_{n}$ любого линейного оператора $V \xrightarrow{f} W$ переводит подпространство соотношений $\mathcal{S}_n(V) \subset V^{\otimes n}$ в подпространство соотношений $\mathcal{S}_n(W) \subset W^{\otimes n}$, корректно определён фактор-оператор $S^nV \xrightarrow{S^n(f)} S^n(W)$, который называется n-той *симметрической степенью* оператора f.

Задача 2.10. Докажите, что выражения для $\mathrm{Tr}\,(\Lambda^k(f))$ через коэффициенты характеристического многочлена оператора f при $k = 1, 2, 3\ldots$ можно вычислять при помощи производящей функции

$$\sum_{k\geqslant 0}\mathrm{Tr}\,(\Lambda^k(f))\cdot z^k = \frac{1}{\det(E - zf)}\,.$$

Указание: без ограничения общности можно считать, что оператор диагонализуем и имеет попарно разные собственные числа (почему?)

§2. Внешняя алгебра векторного пространства

В этом параграфе мы дадим определение алгебры *грассмановых* многочленов от *антикоммутирующих* переменных. Всюду в этом параграфе предполагается, что $\operatorname{char} k \neq 2$.

2.1. Антисимметризующие соотношения. Обозначим через $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}(V)$ двусторонний идеал, порождённый подпространством $\mathcal{A}_2 \subset V \otimes V \subset \mathcal{T}(V)$, которое, по определению, представляет собой линейную оболочку всевозможных тензоров вида

$$v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1 \quad , \qquad v_1,\, v_2 \in V \;.$$

Как векторное пространство идеал $\mathcal{S}$ является прямой суммой своих однородных компонент

$$\mathcal{A}_n \overset{\text{def}}{=} \mathcal{A} \cap V^{\otimes n} \subset V^{\otimes n} \;.$$

Подпространство $\mathcal{A}_n$ линейно порождается всевозможными тензорами вида

$$\begin{aligned} \cdots \otimes v_{i-1} \otimes v_i \otimes v_{i+1} \otimes v_{i+2} \otimes \cdots \quad + \quad \cdots \otimes v_{i-1} \otimes v_{i+1} \otimes v_i \otimes v_{i+2} \otimes \cdots \quad = \\ = \quad \cdots \otimes v_{i-1} \otimes (v_i \otimes v_j + \otimes v_j \otimes v_i) \otimes v_{i+2} \otimes \cdots \end{aligned} \tag{2-2}$$

(соответственные сомножители, обозначенные многоточиями, одинаковы во всех трёх произведениях).

Задача 2.11. Убедитесь, что в $\mathcal{A}_n$ содержатся все тензоры вида

$$t - \operatorname{sgn}(\sigma)\, \sigma(t) \;, \quad \text{где} \quad t \in V^{\otimes n} \;,\; \sigma \in \mathfrak{S}_n \;,$$

2.2. Определение. *Фактор-алгебра* $\Lambda(V) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{T}(V)/\mathcal{A} = \bigoplus_{n\geqslant 0} (V^{\otimes n}/\mathcal{A}_n)$ *называется внешней или грассмановой алгеброй пространства* V, *а её однородные компоненты* $\Lambda^n V = V^{\otimes n}/\mathcal{A}_n$ *называются внешними степенями пространства* V.

2.3. Свойства внешнего умножения. Умножение во внешней алгебре обозначается значком $\wedge$. Внешняя алгебра линейно порождается произведениями вида $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k$ — образами разложимых тензоров $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_k$. При перестановке местами любых двух сомножителей такое произведение сменит знак. В частности, $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k = 0$, если среди сомножителей v_i встречаются одинаковые.

Задача 2.12. Докажите, что $\Lambda^n V = 0$ при $n > d = \dim V$, и выведите отсюда, что внешняя алгебра *конечномерна*.

При перестановке однородных сомножителей $\omega_1 \in \Lambda^k V$ и $\omega_2 \in \Lambda^m V$ знак произведения меняется по правилу

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{km} \omega_2 \wedge \omega_1 \;.$$

(ибо для превращения левой части в правую потребуется mn транспозиций линейных сомножителей). Это свойство называют *суперкоммутативностью*. Отметим, что однородные элементы чётной степени перестановочны со всеми элементами внешней алгебры и составляют в ней *коммутативный* идеал.

Задача 2.13. Докажите, что $\dim \Lambda^d V = 1$, где $d = \dim V$.

Задача 2.14. Опишите центр внешней алгебры.

2.4. Универсальность внешних степеней. Отображение $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\mathfrak{a}_n} \Lambda^n V$ заданное правилом

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) \longmapsto v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$$

полилинейно, кососимметрично и универсально в следующем смысле.

2.4.1. Лемма. *Для любого пространства W отображение $\mathrm{Hom}(\Lambda^n V, W) \to \mathsf{Alt}^n(V^*) \otimes W$, переводящее линейный оператор $\Lambda^n V \xrightarrow{f} W$ в композицию $V \times V \times \cdots \times V \xrightarrow{f \circ \mathfrak{s}_n} W$, устанавливает канонический изоморфизм пространства линейных операторов из $\Lambda^n V$ в W с пространством полилинейных кососимметричных отображений $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to W$.* $\square$

Задача 2.15. Докажите, лемму и проверьте, что внешняя степень $\Lambda^n V$ определяется её условиями однозначно с точностью до единственного изоморфизма. перестановочного с $\mathfrak{a}_n$.

Задача 2.16. Постройте канонические изоморфизм $\bigoplus\limits_{k=0}^{n} \Lambda^k(U) \otimes \Lambda^{n-k}(V) \xrightarrow{\sim} \Lambda^n(U \oplus V)$.

2.5. Базис внешней алгебры Пусть векторы $e_1, e_2, \dots, e_d$ составляют базис в пространстве V. Рассмотрим векторное пространство W, базис в котором составляют C_d^n символов вида ξ_I, где $I = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_n\}$ пробегает всевозможные упорядоченные по возрастанию n-индексные поднаборы упорядоченного набора индексов $\{1, 2, \dots, d\}$. Существует единственное полилинейное отображение

$$\underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \xrightarrow{\varphi} W ,$$

которое действует на наборы попарно различных базисных векторов по правилу

$$(e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{in}) \longmapsto \mathrm{sgn}(\sigma)\, \xi_I$$

(где $I = \{i_{\sigma(1)}, i_{\sigma(2)}, \dots, i_{\sigma(n)}\}$ получается из $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ упорядочением индексов i_ν по возрастанию, и $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ – необходимая для этого перестановка номеров ν), а все остальные наборы базисных векторов отображает в нуль. Это отображение кососимметрично, и значит, пропускается через $\Lambda^n V$. При этом векторы

$$e_I \overset{\text{def}}{=} e_{i1} \wedge e_{i2} \wedge \cdots \wedge e_{in} \in \Lambda^n V \qquad (\, 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leqslant d \,) \tag{2-3}$$

перейдут в базисные векторы пространства W, откуда следует из линейная независимость. С другой стороны, будучи фактором $V^{\otimes n}$, пространство $\Lambda^n V$, порождается образами разложимых базисных тензоров, которые вследствие суперкоммутативности исчерпываются произведениями (2-3). Таким образом C_d^n векторов (2-3) составляют базис во внешней алгебре.

Внешние произведения этих базисных векторов задаются формулами:

$$e_I \wedge e_J = \left(e_{i1} \wedge e_{i2} \wedge \cdots \wedge e_{im}\right) \wedge \left(\varepsilon_{j_1} \wedge \varepsilon_{j_2} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{j_n}\right) = \\ = \begin{cases} 0 & , \quad \text{при} \quad I \cap J \neq \varnothing \\ \mathrm{sgn}(\sigma_{IJ})\, e_K & , \quad \text{при} \quad I \cap J = \varnothing\,,\ I \cup J = K \end{cases} \tag{2-4}$$

где перестановка $\sigma_{IJ} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_m & j_1 & j_2 & \cdots & j_n \\ k_1 & k_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & k_{m+n} \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_{m+n}$ упорядочивает индексы по возрастанию, а $e_K = k_{i_1} \wedge k_{i_2} \wedge \cdots \wedge k_{i_{m+n}}$.

Задача 2.17. Пусть $I = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ и $J = \{j_1, j_2, \dots, j_{d-n}\}$ два дополнительных[1] друг другу набора возрастающих индексов. Докажите, что знак перестановки

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n & j_1 & j_2 & \cdots & j_{d-n} \\ 1 & 2 & \cdots & n & (n+1) & (n+2) & \cdots & d \end{pmatrix}$$

равен $(-1)^{(i_1-1)+(i_2-2)+\cdots+(i_n-n)} = (-1)^{|I|-\#I(\#I-1)/2}$.

2.5.1. Двойственность между дополнительными внешними степенями. Естественный изоморфизм

$$\Lambda^n V \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}\left(\Lambda^{d-n}V\,,\ \Lambda^d V\right) = \left(\Lambda^{d-n}V\right)^* \otimes \Lambda^d V \qquad (\, d = \dim V\,)\,,$$

сопоставляющий каждому $\omega \in \Lambda^n V$ оператор левого внешнего умножения на $\wedge$:

$$\zeta \longmapsto \omega \wedge \zeta\,,$$

переводит базисный вектор $e_I = e_{i1} \wedge e_{i2} \wedge \cdots \wedge e_{in} \in \Lambda^n V$ в «матричную единицу»:

$$\left(e_{\widehat{I}}\right)^* \otimes e_{\{1,2,\dots,d\}} \ :\quad e_J \longmapsto \begin{cases} (-1)^{|I|-n(n-1)/2} e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_d & , \quad \text{при} \quad J = \widehat{I} \\ 0 & , \quad \text{при} \quad J \neq \widehat{I} \end{cases}$$

где $\widehat{I} = \{1, 2, \dots, d\} \setminus I$.

2.5.2. Грассмановы многочлены. Если в пространстве V зафиксирован базис, то внешняя алгебра $\Lambda(V)$ может восприниматься как алгебра *грассмановых многочленов* $k\langle e_1, \dots, e_d\rangle$ от базисных векторов пространства V. Как и обычная алгебра многочленов $k[x_1, \dots, x_d]$, алгебра грассмановых многочленов $k\langle \xi_1, \dots, \xi_d\rangle$ может быть определена как векторное пространство, базис в котором составляют грассмановы мономы

$$\xi_I \stackrel{\text{def}}{=} \xi_{i1} \wedge \xi_{i2} \wedge \cdots \wedge \xi_{ik} \qquad \text{с} \qquad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant d\,, \tag{2-5}$$

которые перемножаются по правилам (2-4), и по дистрибутивности это умножение распространяется на их линейные комбинации. Тавтологический изоморфизм $k\langle \xi_1, \dots, \xi_d\rangle \simeq \Lambda(V)$, переводящий грассмановы переменные в базисные векторы пространства V, показывает, что алгебра грассмановых многочленов ассоциативна и суперкоммутативна.

Задача 2.18. Убедитесь, что в отличие от n° 1.5, сопоставление грассманову многочлену $\gamma(\xi)$ функции $V \longrightarrow k$, переводящей вектор $v = \sum a_i e_i$ в число $\gamma(a)$, всегда определяет *тождественно нулевую* функцию.

2.5.3. Замены базиса и соотношения Лапласа. При линейной замене грассмановых переменных по формулам $\eta_i = \sum\limits_{j=1}^{d} a_{ij}\,\xi_j$ базисные мономы $\eta_I = \eta_{i1} \wedge \eta_{i2} \wedge \cdots \wedge \eta_{in}$ будут

[1] т. е. $I \cap J = \varnothing$ и $I \cup J = \{1, 2, \dots, d\}$

выражаться через базисные мономы $\xi_J = \xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge \cdots \wedge \xi_{j_n}$ по формулам

$$\eta_I = \eta_{i_1} \wedge \eta_{i_2} \wedge \cdots \wedge \eta_{i_n} = \left(\sum_{j_1} a_{1j}\,\xi_j\right) \wedge \left(\sum_{j_2} a_{2j_2}\,\xi_j\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{j_n} a_{nj_n}\,\xi_j\right) =$$

$$= \sum_{\substack{J:\\ \#J=n}} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{i_1 j_{\sigma(1)}} a_{i_2 j_{\sigma(2)}} \cdots a_{i_n j_{\sigma(n)}}\, \xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge \cdots \wedge \xi_{j_n} = \sum_{\substack{J:\\ \#J=n}} a_{IJ}\,\xi_J\,,$$

где a_{IJ} — это $(n\times n)$-минор матрицы (a_{ij}), сосредоточенный в строках с номерами из I и столбцах с номерами из J.

Если зафиксировать два дополнительных набора индексов I и $\widehat{I}$ и проделать только что описанную замену переменных в тождестве

$$\eta_I \wedge \eta_{\widehat{I}} = (-1)^{|I|+\frac{1}{2}\#I(\#I+1)} \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \cdots \wedge \eta_d$$

то в левой части получится

$$\eta_I \wedge \eta_{\widehat{I}} = \Big(\sum_{\substack{K:\\ \#K=\#I}} a_{I\,K}\,\xi_K\Big) \wedge \Big(\sum_{\substack{L:\\ \#L=(d-\#I)}} a_{L\widehat{I}}\,\xi_L\Big) =$$

$$= (-1)^{\#I(\#I+1)/2} \sum_{\substack{K:\\ \#K=\#I}} (-1)^{|K|} a_{IK} a_{\widehat{I}\widehat{K}}\, \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_d\,,$$

где $\widehat{K} = \{1,2,\ldots,d\}\setminus K$ – это дополнительный к K набор возрастающих индексов. В правой же части получится

$$(-1)^{\#I(\#I+1)/2}(-1)^{|I|}\det(a_{ij})\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_d\,.$$

Таким образом, для произвольной матрицы (a_{ij}) справедливо тождество

$$\sum_{\substack{K:\\ \#K=\#I}} (-1)^{|K|+|I|} a_{IK}\widehat{a}_{IK} = \det(a_{ij})\,, \tag{2-6}$$

в котором через $\widehat{a}_{IK} = a_{\widehat{I}\widehat{K}}$ обозначен $(d-n)\times(d-n)$-минор, дополнительный[2] к $(n\times n)$-минору a_{IK} и суммирование происходит по всем $(n\times n)$-минорам a_{IK}, стоящим в строках с номерами из I.

Если же $I \cap J \neq \varnothing$, то аналогичное предыдущему вычисление с тождеством $\eta_I \wedge \eta_J = 0$ приводит к равенству

$$\sum_{\substack{K:\\ \#K=\#I}} (-1)^{|K|+|I|} a_{IK}\widehat{a}_{JK} = 0\,, \tag{2-7}$$

Число $(-1)^{|I|+|J|}\widehat{a}_{IJ}$ называется алгебраическим дополнением к минору a_{IJ}. Тождества (2-6) и (2-7) известны как *соотношения Лапласа* или формула для разложения определителя по набору строк (равенство (2-6)) и теорема об умножении на чужие алгебраические дополнения

[2] т. е. стоящий в строках и столбцах с дополнительными номерами

(равенство (2-7)). Если организовать $(n\times n)$-миноры в $C_d^n\times C_d^n$- матрицу $A=(a_{IJ})$, а алгебраические дополнения – в матрицу $\widehat{A}=\big((-1)^{|I|+|J|}\widehat{a}_{IJ}\big)$ (того же размера), то все соотношения Лапласа можно изобразить одним матричным соотношением

$$A\,\widehat{A}^t=\widehat{A}^t\,A=\det(a_{ij})\,E\ .$$

Задача 2.19. Опираясь на канонический изоморфизм из n° 2.5.1 дайте другое (и более концептуальное) доказательство этого матричного тождества.

Задача 2.20. Пусть верхнетреугольные матрицы A и B таковы, что $AB=E$. Докажите, что всякий минор матрицы A равен своему алгебраическому дополнению в матрице B^t.

2.6. Внешние степени линейного оператора. Поскольку тензорная степень

$$f^{\otimes n}\overset{\text{def}}{=}\underbrace{f\otimes f\otimes\cdots\otimes f}_{n}$$

любого линейного оператора $V\xrightarrow{f}W$ переводит подпространство соотношений $\mathcal{A}_n(V)\subset V^{\otimes n}$ в подпространство соотношений $\mathcal{A}_n(W)\subset W^{\otimes n}$ (см. (2-2)), корректно определён фактор-оператор $\Lambda^nV\xrightarrow{\Lambda^n(f)}\Lambda^n(W)$, который называется n-той *внешней степенью* оператора f.

Задача 2.21. Пусть оператор $V\xrightarrow{f}W$ задаётся матрицей (f_{ij} столбцы которой суть столбцы координат образов $f(v_j)$ неких базисных векторов $v_j\in V$ в некотором базисе $w_i\in W$. Выразите матричные элементы f_{IJ} оператора $\Lambda^k(f)$ в базисах

$$v_J=v_{j_1}\wedge v_{j_2}\wedge\cdots\wedge v_{j_k}\in\Lambda^kV\qquad\text{и}\qquad w_I=w_{i1}\wedge w_{i2}\wedge\cdots\wedge w_{ik}\in\Lambda^kW\ .$$

Задача 2.22. Выразите $\mathrm{Tr}\,(\Lambda^k(f))$ через коэффициенты характеристического многочлена оператора $V\xrightarrow{f}V$.

2.7. Внешняя алгебра и кососимметрические тензоры. Над полем характеристики нуль проекция $V^{\otimes n}\xrightarrow{\mathfrak{a}_n}\Lambda^nV$ индуцирует канонический изоморфизм $\mathsf{Alt}^n(V)\xrightarrow{\sim}\Lambda^n(V)$ подпространства симметрических тензоров с внешней алгеброй и переводит базисные кососимметричные тензоры

$$e_{[I]}=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\,e_{i_{\sigma(1)}}\otimes e_{i_{\sigma(2)}}\otimes\ \cdots\ \otimes e_{i_{\sigma(n)}}\subset\mathsf{Alt}^n(V)$$

в базисные грассмановы мономы $n!\,e_{i1}\wedge e_{i2}\wedge\cdots\wedge e_{in}$. Более того, поскольку оператор полного альтернирования

$$V^{\otimes n}\xrightarrow{\mathrm{alt}_n}\mathsf{Alt}^n(V)\quad:\qquad t\longmapsto\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\,\sigma(t)\ ,$$

переводит всякий тензор t в тензор, который сравним с t по модулю $\mathcal{A}_n$, ибо

$$t-\mathrm{alt}_n(t)=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\Big(t-\mathrm{sgn}(\sigma)\,\sigma(t)\Big)\in\mathcal{A}_n\ ,$$

возникает коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
V^{\otimes n} \arrow[r, "\mathrm{alt}_n"] \arrow[dr, "\mathfrak{a}_n"'] & \mathsf{Alt}^n(V) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathfrak{a}_n"] & V^{\otimes n} \arrow[dl, "\mathfrak{a}_n"] \\
& \Lambda^n V &
\end{tikzcd}$$

Задача 2.23. Убедитесь, что над полем характеристики нуль проекция $\mathsf{Alt}(V) \xrightarrow{\oplus\mathfrak{a}_n} \Lambda(V)$ является изоморфизмом алгебр (т. е. переводит определённое в прошлой лекции кососимметрическое произведение на $\mathsf{Alt}(V)$ во внешнее произведение).

2.7.1. Двойственность между $\Lambda^n(V)$ и $\Lambda^n(V^*)$. Над полем характеристики нуль композиция проекции $\mathsf{Alt}^n(V^*) \xrightarrow{\sim} \Lambda^n(V^*)$ и канонического изоморфизма $\mathsf{Alt}^n(V^*) \simeq (\Lambda^n V)^*$ (универсальность внешнего степени) задаёт отождествление

$$(\Lambda^n V)^* \xrightarrow{\sim} \Lambda^n(V^*) \ ,$$

Таким образом, при $\operatorname{char} k = 0$ пространства $(\Lambda^n(V))$ и $\Lambda^n(V^*)$ канонически двойственны друг другу, и при этой двойственности стандартные базисные векторы спариваются по правилу

$$\langle e_I , x_J \rangle = n! \cdot \delta_{IJ}$$

2.8. Критерий разложимости поливектора. Всюду в этом пункте мы предполагаем, что $\operatorname{char} k = 0$. Векторы $\omega \in \Lambda^n V$ иногда называют *поливекторами* или n-векторами в V.

Задача 2.24. Проверьте, что $\Lambda^n(U \cap W) = \Lambda^n U \cap \Lambda^n W \quad \forall\, U, W \subset V$.

С каждым n-вектором ω можно связать его *оболочку* $Span(\omega)$ — минимальное по включению подпространство в V, удовлетворяющее условию $\omega \in \Lambda^n W$. Его можно задать как пересечение всех удовлетворяющих этому условию подпространств:

$$Span(\omega) = \bigcap_{\omega \in \Lambda^n W \subset V} W$$

Поливектор $\omega \in \Lambda^n V$ называется разложимым, если он представим в виде произведения

$$\omega = v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$$

n «обычных» векторов пространства V.

Задача 2.25. Докажите, что следующие условия на поливектор $\omega \in \Lambda^n V$ эквивалентны: (а) ω разложим; (б) $\dim Span(\omega) = n$; (в) $v \wedge \omega = 0 \quad \forall\, v \in , Span(\omega)$.

Чтобы описать $Span(\omega)$ конструктивно, рассмотрим линейный оператор свёртки с ω:

$$\Lambda^{n-1}(V^*) \xrightarrow{i_\omega} V \ ,$$

который переводит поливекторы $\zeta \in \Lambda^{n-1}(V^*) \simeq \mathsf{Alt}^{n-1}(V^*) \subset V^{*\otimes(n-1)}$, рассматриваемые как кососимметричные тензоры, в их свёртки по первым $(n-1)$ индексам с ω, который также рассматривается как кососимметричный тензор из $V^{\otimes n}$:

$$i_\omega : \zeta \longmapsto c_{\{1,2,\dots,(n-1)\},\{1,2,\dots,(n-1)\}}(\zeta \otimes \omega) \in V$$

Поскольку $\omega \subset \Lambda^n Span\,(\omega) \subset Span\,(\omega)^{\otimes n}$, свёртка ω с любым тензором из $V^{*\otimes(n-1)}$ будет вектором из $Span\,(\omega)$. Поэтому $\operatorname{im} i_\omega \subset Span\,(\omega)$.

2.8.1. Лемма. $Span\,(\omega) = \operatorname{im} i_\omega$.

Доказательство. Достаточно проверить, что любой функционал $\xi \in V^*$, который аннулирует $\operatorname{im} i_\omega$, будет аннулировать и $Span\,(\omega)$. Дополним ξ до базиса в V^*, и запишем поливектор ω в двойственном базисе пространства V как

$$\omega = \omega' \wedge e + \omega'' \qquad \text{с} \quad \omega' \in \Lambda^{n-1}\operatorname{Ann}\xi\ , \quad \omega'' \in \Lambda^n \operatorname{Ann}\xi\ ,$$

где $e \in V$ – это базисный вектор, двойственный ξ. Если $\operatorname{im} i_\omega \subset \operatorname{Ann}\xi$, то для любого $\zeta \in \Lambda^{n-1}V$ будем иметь тривиальную полную свёртку:

$$0 = \left\langle\, \xi\,,\, i_\omega(\zeta)\,\right\rangle = \left\langle\, \zeta\otimes\xi\,,\,\omega\,\right\rangle = \left\langle\, \zeta\otimes\xi\,,\,\omega''\,\right\rangle + \left\langle\, \zeta\otimes\xi\,,\,\omega'\wedge e\,\right\rangle = \left\langle\, \zeta\,,\,\omega'\,\right\rangle\,,$$

Поэтому $\omega' = 0$ и $Span\,(\omega) = Span\,(\omega'') \subset \operatorname{Ann}\xi$. □

2.8.2. Следствие. *Поливектор $\omega \in \Lambda^n V$ разложим тогда и только тогда, когда он удовлетворяет системе квадратных уравнений*

$$i_\omega(\zeta) \wedge \omega = 0 \qquad \forall\,\zeta \in \Lambda^{n-1}\,(V^*) \tag{2-8}$$

(они называются соотношениями Плюккера). □

Поскольку соотношения (2-8) линейны по ζ их достаточно проверять только для C_d^{n-1} базисных тензоров $\zeta = x_I$. Таким образом, множество разложимых тензоров представляет собой пересечение C_d^{n-1} квадрик. Но даже и эти «базисные» квадрики в действительности зависимы, и для описания множества разложимых поливекторов часто бывает можно обойтись ещё меньшим числом уравнений. Геометрическая точка зрения на сей счёт будет развита в следующих двух лекциях.

Задача 2.26. Докажите, что бивектор ω на четырёхмерном пространстве разложим тогда и только тогда, когда $\omega\wedge\omega = 0$.

2.9. Комплексы ДеРама и Кошуля. В этом пункте мы снова считаем, что $\operatorname{char} k = 0$. Рассмотрим линейный оператор $d_{m,n}$, определяемый как композиция

$$\begin{tikzcd}
S^m(V^*)\otimes\Lambda^n(V^*) \arrow[rr, "d_{m,n}"] \arrow[dr, "\Delta\otimes Id"'] & & S^{m-1}(V^*)\otimes\Lambda^{n+1}(V^*) \\
& S^{m-1}(V^*)\otimes V^*\otimes\Lambda^n(V^*) \arrow[ur, "Id\otimes\wedge"'] &
\end{tikzcd}$$

где $S^m(V^*) \xrightarrow{\Delta} S^{m-1}(V^*)\otimes V^*$ — оператор, двойственный к симметрическому умножению $S^{m-1}V\otimes V \xrightarrow{\mu} S^m V$, а $V^*\otimes\Lambda^n(V^*) \xrightarrow{\wedge} \Lambda^{n+1}(V)$ — внешнее умножение.

Задача 2.27. Убедитесь, что $\operatorname{im}(d_{m,n}) \subset \ker(d_{m-1,n+1})$, т. е. что последлвательность операторов

$$\cdots\, S^{m+1}(V^*)\otimes\Lambda^{n-1}(V^*) \xrightarrow{d} S^m(V^*)\otimes\Lambda^n(V^*) \xrightarrow{d} S^{m-1}(V^*)\otimes\Lambda^{n+1}(V^*)\,\cdots$$

является *комплексом*.

Складывая все такие последовательности и группируя вместе одинаковые внешние степени, мы с учётом отождествления $\bigoplus\limits_{m\geqslant 0} S^m(V^*) \simeq k[x_1,\dots,x_d]$ получаем комплекс бесконечномерных векторных пространств:

$$\cdots\, k[x_1,\dots,x_d]\otimes\Lambda^{n-1}(V^*) \xrightarrow{d} k[x_1,\dots,x_d]\otimes\Lambda^{n}(V^*) \xrightarrow{d} k[x_1,\dots,x_d]\otimes\Lambda^{n+1}(V^*)\,\cdots\ .$$

Он называется *комплексом ДеРама*, а входящие в него пространства — модулями *дифференциальных форм с полиномиальными коэффициентами*, поскольку они представляют собой свободные модули конечного ранга над кольцом $k[x_1,\dots,x_d]$. Отображения d, однако, не являются гомоморфизмами $k[x_1,\dots,x_d]$-модулей, поскольку не перестановочны с умножением на многочлены, отличные от констант. Операция d называется *внешним дифференцированием* и представляет собой дифференциальный оператор. Она увеличивает внешнюю степень формы, одновременно уменьшая степень её коэффициентов.

Задача 2.28. Убедитесь, что в координатах нешнее дифференцирование происходит по формуле:

$$d\Big(\,F(x)\otimes x_{i1}\wedge x_{i2}\wedge\cdots\wedge x_{in}\Big) = \sum_{\alpha=1}^{d}\frac{\partial F(x)}{\partial x_\alpha}\otimes x_\alpha\wedge x_{i1}\wedge x_{i2}\wedge\cdots\wedge x_{in}\ .$$

Двойственным к дерамовскому дифференциалу $d_{m+1,n-1}$ будет оператор

$$S^m(V)\otimes\Lambda^n(V) \xrightarrow{\partial_{m,n}} S^{m+1}(V)\otimes\Lambda^{n-1}(V);\,,$$

представляющий собой композицию симметрического произведения и внешнего коумножения. Это отображение называется *дифференциалом Кошуля.*

Задача 2.29. Проверьте, что $\operatorname{im}\partial_{m,n}\subset\ker\partial_{m+1,n-1}$ и что кошулевские дифференциалы можно сгруппировать в *комплекс Кошуля*

$$\cdots\ \longrightarrow S(V)\otimes\Lambda^{n+1}V \xrightarrow{\partial} S(V)\otimes\Lambda^{n}V \xrightarrow{\partial} S(V)\otimes\Lambda^{n+1}V \longrightarrow\ \cdots$$

Если теперь написать комплекс Кошуля для пространства V^* вместо пространства V, то мы получим комплекс, состоящий из тех же модулей над кольцом многочленов, что и комплекс ДеРама, но со стрелками, идущими в противоположную сторону:

$$\cdots\, k[x_1,\dots,x_d]\otimes\Lambda^{n+1}(V^*) \xrightarrow{\partial} k[x_1,\dots,x_d]\otimes\Lambda^{n}(V^*) \xrightarrow{\partial} k[x_1,\dots,x_d]\otimes\Lambda^{n-1}(V^*)\,\cdots\ .$$

Задача 2.30. Вычислите явно $\partial\Big(\,F(x)\otimes x_{i1}\wedge x_{i2}\wedge\cdots\wedge x_{in}\Big)$.

Задача 2.31. Докажите, что ∂ является гомоморфизмом $k[x_1,\dots,x_d]$-модулей, т. е. перестановочен с умножением на многочлены.

Задача 2.32. Вычислите коммутатор $\gamma = \partial_{m-1,n+1}\circ d_{m,n} - d_{m+1,n-1}\circ\partial_{m,n}$:

$$\begin{tikzcd}
S^m(V^*)\otimes\Lambda^n(V^*) \arrow[r, "d_{m,n}"] \arrow[d, "\partial_{m,n}"'] \arrow[dr, dashed, "\gamma"] & S^{m-1}(V^*)\otimes\Lambda^{n+1}(V^*) \arrow[d, "\partial_{m-1,n+1}"] \\
S^{m+1}(V^*)\otimes\Lambda^{n-1}(V^*) \arrow[r, "d_{m+1,n-1}"'] & S^m(V^*)\otimes\Lambda^n(V^*)
\end{tikzcd}$$

Задача 2.33. Докажите, что оба комплекса – Кошуля и ДеРама – являются *точными*, т. е. $\ker d_{m,n} = \operatorname{im} d_{m+1,n-1}$ и $\ker\partial_{m,n} = \operatorname{im}\partial_{m-1,n+1}$.