Лекция 3
Проективная геометрия.

▷Проективное пространство и однородные координаты. ▷Аффинные карты и клеточное разбиение. ▷Проектирование ▷Линейные проективные преобразования ▷Пространство коник ▷Коника Веронезе ▷Гексограмма Паскаля ▷Геометрия проективных квадрик ▷Полярное соответствие ▷Квадрика Сегре в $\mathbb{P}_3$. ▷Квадрика Плюккера в $\mathbb{P}_5$. ▷Циклы Шуберта ▷Пучки и связки прямых в $\mathbb{P}_3$ ▷Звёздочка Ходжа

§1. Проективное пространство.

1.1. Аффинные карты и клеточное разбиение. Пусть V – $(n+1)$-мерное векторное пространство над полем k. Точечное пространство, точки которого взаимно однозначно соответствуют классам пропорциональности ненулевых векторов из V, называется *проективизацией* пространства V и обозначается $\mathbb{P}(V)$ или $\mathbb{P}_n$, если важна только размерность.

Иными словами, точки n-мерного проективного пространства $\mathbb{P}(V)$ – это прямые в $(n+1)$-мерном аффинном пространстве $Aff(V)$, проходящие через «начальную» точку 0, соответствующую нулевому вектору. Чтобы наблюдать их в виде настоящих точек, надо разместить в $Aff(V)$ экран – любую n-мерную аффинную гиперплоскость, не проходящую через нуль. Такие гиперплоскости называются *аффинными картами* на $\mathbb{P}_n$. Прямые, пересекающие экран изобразятся на аффинной карте обычными точками (см. рис. 1).

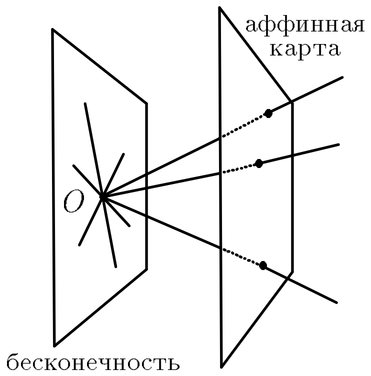

Рис. 1. Проективный мир.

Отметим, что никакая аффинная карта не покрывает $\mathbb{P}_n$ целиком – вне неё остаются все параллельные ей прямые, составляющие, проективное пространство $\mathbb{P}_{n-1} \subset \mathbb{P}_n$. Оно называется *бесконечно удалённой гиперплоскостью* по отношению к выбранной аффинной карте. Таким образом мы получаем разбиение $\mathbb{P}_n$ в дизъюнктное объединение открытых аффинных «клеток»:

$$\mathbb{P}_n = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \mathbb{P}_{n-2} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{A}^0$$

в котором последнее $\mathbb{A}^0 = \mathbb{P}_0$ – это одна точка.

Задача 3.1. Сколько точек в проективном пространстве над конечным полем $\mathbb{F}_q$? Подсчитаете количество точек в левой и правой частях предыдущей формулы независимо (получится формула суммирования).

Задача 3.2. Опишите топологические пространства $\mathbb{RP}_n$ и $\mathbb{CP}_n$ хотя бы для $n = 1, 2$. Какие у них группы гомологий и фундаментальные группы?

1.2. Однородные и аффинные координаты. Фиксируем базис $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ с координатами $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$. Наборы отношений $(t_0 : t_1 : \ldots : t_n)$ взаимно однозначно соответствуют точкам проективного пространства $\mathbb{P}(V)$ и называются *однородными координатами* в $\mathbb{P}_n$. Работают с однородными координатами как и с обычными, помня, однако, что геометрически корректными являются только те формулы, смысл которых не меняется при умножении всех координат на общую константу. Например, если $F(t)$ — однородный многочлен, скажем, m-той степени, то уравнение $F(t) = 0$ корректно определяет геометрическую фигуру на $\mathbb{P}_n$, поскольку для пропорционального набора координат λt, который изображает ту же точку на $\mathbb{P}_n$, также имеем $F(\lambda t) = \lambda^m F(t) = 0$. Напротив, уравнение типа $t_0^2 + t_1 = 3$ никакой геометрической фигуры не задаёт.

Кроме однородных координат, определённых глобально на всём $\mathbb{P}_n$, можно использовать при вычислениях *локальные аффинные* координаты, выбирая базис отдельно в каждой аффинной карте. При этом необходимо помнить, что одна и та же точка $\mathbb{P}_n$ будет изображаться в различных аффинных картах различными координатами. В частности, задавая глобальный объект локальными уравнениями надо проверять, что эти уравнения согласованы на пересечениях карт.

1.2.1. Стандартное аффинное покрытие. Обозначим через U_ν, $0 \leqslant \nu \leqslant n$, аффинную карту в $\mathbb{P}_n$, заданную аффинной гиперплоскостью $\{t_\nu = 1\} \subset V$, и зафиксируем в ней аффинные координаты $x_i^{(\nu)}$ относительно параллельных U_ν базисных векторов e_i с $i \neq \nu$ (всего будет n координат, индекс $i = \nu$ останется незадействован в $x_i^{(\nu)}$). Такие карты U_ν называются *стандартными аффинными картами*. Карта U_ν покрывает все точки $t \in \mathbb{P}_n$, у которых $t_\nu \neq 0$, и сопоставляет каждой такой точке набор аффинных координат $x_i = t_i / t_\nu$ (где $i \neq \nu$). Таким образом, $\mathbb{P}_n = \bigcup\limits_{\nu=0}^{n} U_\nu$, и $U_\mu \cap U_\nu$ состоит из точек t, у которых $t_\mu, t_\nu \neq 0$ одновременно. Внутри U_μ это пересечение в локальных аффинных координатах описывается условием $x_\nu^{(\mu)} \neq 0$, а внутри U_ν — условием $x_\mu^{(\nu)} \neq 0$. Набор локальных координат $x^{(\mu)}$ тогда и только тогда описывает ту же точку $t \in U_\nu \cap U_\mu \subset \mathbb{P}_n$, что и набор локальных координат $x^{(\nu)}$, когда

$$
\begin{aligned}
x_\nu^{(\mu)} &= 1 / x_\mu^{(\nu)} \\
x_i^{(\mu)} &= x_i^{(\nu)} / x_\mu^{(\nu)} \quad \text{при} \quad i \neq \mu, \nu
\end{aligned}
$$

Правые части этих формул называются *функциями перехода* от координат $x^{(\nu)}$ к координатам $x^{(\mu)}$ на $U_\mu \cap U_\nu$.

Задача 3.3. Задайте плоскую конику $t_0^2 + t_1^2 = t_2^2$ локальными аффинными уравнениями в стандартных картах U_1 и U_2, а также в карте $U = \{\, t \mid t_0 = t_1 + 1 \,\}$ (в каких хотите аффинных координатах). Какие аффинные кривые второго порядка при этом получатся?

1.3. Подпространства. Проективным подпространством в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ называется проективизация $\mathbb{P}(W)$ произвольного ненулевого векторного подпространства $W \subset V$. Подчеркнём, что *нульмерное* проективное подпространство (т. е. проективизация одномерного векторного) – это одна точка. Отметим также, что *коразмерность* $\mathbb{P}(W)$ в $\mathbb{P}(V)$ совпадает с *коразмерностью* W в V. Поэтому коразмерность пересечения k-мерного и m-мерного проективных подпространств в $\mathbb{P}_n$ не превышает $n-k+n-m$, и стало быть размерность такого пересечения не меньше $k+m-n$. В частности, любые два подпространства размерностей k и $n-k$ имеют в $\mathbb{P}_n$ непустое пересечение. Например, любые две прямые на $\mathbb{P}_2$ пересекаются.

1.4. Двойственность. Сопоставляя каждому подпространству $W \subset V$ его аннулятор $\mathrm{Ann}\,(W) \subset V^*$, мы получаем биекцию между k-мерными подпространствами в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и подпространствами коразмерности k в $\mathbb{P}_n^\times = \mathbb{P}(V^*)$. Эта биекция, очевидно, оборачивает включения, ибо $U \subset W \iff \mathrm{Ann}\,(U) \supset \mathrm{Ann}\,(W)$.

Задача 3.4. Убедитесь, что $(n+1)$ точек в $\mathbb{P}_n^\times$ лежат в одной гиперплоскости тогда и только тогда, когда соответствующие им $(n+1)$ гиперплоскостей в $\mathbb{P}_n$ пересекаются. Обобщите это утверждение в таком духе: m точек на $\mathbb{P}_n$ лежат в одной k-мерной плоскости тогда и только тогда, когда соответствующие им ....

1.5. Проектирование. Разложению векторного пространства в прямую сумму $V = U \oplus W$ двух ненулевых подпространств соответствует выбор в проективном пространстве $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ двух *непересекающихся* подпространств $C = \mathbb{P}(U)$ и $H = \mathbb{P}(W)$ с максимально возможной суммой размерностей $\dim C + \dim L = n-1$. Такие проективные подпространства называются *дополнительными*.

Поскольку всякий вектор $v \in V$ имеет единственное представление в виде $v = u + w$ с $u \in U$ и $w \in W$, для каждого $v \in V \setminus (U \cup W)$ существует единственное содержащее v двумерное подпространство $L \subset V$, имеющая ненулевое пересечение как с U, так и с W. Это подпространство — линейная оболочка тех u и w, для которых $u + w = v$. Геометрически это означает, что для любой точки $p \in \mathbb{P}_n \setminus (C \cup H)$ существует ровно одна прямая $\ell = \mathbb{P}(L)$, которая проходит через p и пересекает как C, так и H.

1.5.1. Определение. *Пусть $C, H \subset \mathbb{P}_n$ – дополнительные проективные подпространства. Отображение $(\mathbb{P}_n \setminus H) \xrightarrow{\pi_C} H$, переводящее каждую точку $p \in \mathbb{P}_n \setminus H$ в точку пересечения с H той единственной проходящей через p прямой, которая задевает как C, так и H, называется линейным проектированием* на H из C.

1.6. Линейные проективные преобразования — это отображения $\mathbb{P}(V) \xrightarrow{f} \mathbb{P}(V)$, индуцированные *невырожденными* линейными операторами $f \in GL(V)$. Группа линейных проективных преобразований пространства $\mathbb{P}(V)$ обозначается $PGL(V)$ и называется *проективной линейной группой*. Если V – это стандартное координатное пространство k^{n+1}, то наряду с $PGL(V)$ пишут также $PGL_{n+1}(k)$.

Задача 3.5. Докажите, что $f \in GL(V)$ действует на $\mathbb{P}(V)$ тождественно тогда и только тогда, когда $f = \lambda\,\mathrm{Id}_V$ – гомотетия.

Задача 3.6. Докажите, что два невырожденных линейных оператора тогда и только тогда индуцируют одно и то же линейное проективное преобразование, когда они пропорциональны.

Задача 3.7. Сколько элементов в $PGL_n(\mathbb{F}_q)$?([1])

1.6.1. Пример: дробно-линейные преобразования прямой. Проективная прямая $\mathbb{P}_1$ с однородными координатами $(t_0 : t_1)$ есть объединение аффинной прямой $\mathbb{A}^1$ – аффинной

[1] хотя бы для $n = 2, 3, 4$ и $q = 2, 3$

карты $\{t_0 = 1\}$ с аффинной координатой $x = t_1/t_0$ – и бесконечно удалённой точки $t = (0\colon 1)$, которой соответствует значение $x = \infty$. Линейный оператор $f \in GL_2$, который действует на однородные координаты по правилу

$$f\begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,t_0 + b\,t_1 \\ c\,t_0 + d\,t_1 \end{pmatrix}$$

индуцирует линейное проективное преобразование, которое в локальной карте $\mathbb{A}^1$ изображается дробно-линейным преобразованием аффинной координаты x

$$f(x) = \frac{a + b\,x}{c + d\,x}\,.$$

Например, преобразование

$$x \longmapsto \frac{x_1 - x_\infty}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_0}{x - x_\infty}$$

замечательно тем, что переводит заданные три точки x_0, x_1 и x_∞ в точки 0, 1 и ∞ соответственно.

Задача 3.8. Докажите, что существует единственное линейное проективное преобразование $\mathbb{P}_1$, которое переводит произвольно заданные три различных точки в любые другие произвольно заданные три различных точки.

Задача 3.9. Существует ли линейное проективное преобразование плоскости

а) переводящее произвольно заданные четыре прямые общего положения[2] в какие-либо другие произвольно заданные четыре прямые общего положения?

б) сохраняющее заданный треугольник и переводящее произвольно заданную точку внутри него в любую другую заданную внутри него точку?

Задача 3.10. Можно ли на «школьной» евклидовой плоскости одной линейкой построить центр заданного круга?

Задача 3.11. Даны шесть точек A, B, C, A', B', C'. Докажите, что если три прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке, то три точки пересечений $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$ и $CA \cap C'A'$ лежат на одной прямой (*теорема Дезарга*).

Задача 3.12. Сформулируйте и докажите двойственное к предыдущему утверждение в $\mathbb{P}_2^\times$ (*теорему Паппа*).

1.6.2. Теорема. *Существует единственное линейное проективное преобразование $\mathbb{P}_n$, переводящее произвольно заданные $(n+2)$ точек общего положения[3] в любые другие произвольно заданные $(n+2)$ точек общего положения.*

Доказательство. Всякий оператор, задающий линейное проективное преобразование, которое переводит $(n+1)$ точек $\mathbb{P}(V)$, соответствующих базисным векторам $\{v_0, v_1, \dots, v_n\} \subset V$, в другие $(n+1)$ точек, соответствующих другим базисным векторам $\{w_0, w_1, \dots, w_n\}$, действует на V по правилу $v_i \longmapsto \lambda_i w_i$, где $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — набор ненулевых констант. Если

[2] в том смысле, что никакие три из них не пересекаются в одной точке

[3] в том смысле, что никакие $(n+1)$ из них не лежат в одной гиперплоскости

$(n+2)$-ая точка, отвечающая вектору $v = \sum \alpha_i v_i$ с ненулевыми[4] α_i, переходит в точку, отвечающую вектору $w = \sum \beta_i w_i$ с ненулевыми β_i, то набор констант λ_i фиксируется однозначно с точностью до пропорциональности: $\lambda_i = \lambda \dfrac{\beta_i}{\alpha_i}$, где λ одно и то же для всех i. □

Задача 3.13. Докажите, что существует линейное проективное преобразование, переводящее заданную пару непересекающихся подпространств в любую другую заданную пару непересекающихся подпространств тех же размерностей.

1.6.3. Неподвижные точки проективного преобразования, индуцированного линейным оператором f, — это классы пропорциональности собственных векторов оператора f. Таким образом, множество неподвижных точек проективного преобразования есть объединение не более чем $(n+1)$ непересекающихся проективных подпространств, являющихся проективизациями собственных подпространств оператора f. В частности, диагонализуемый оператор с попарно разными собственными значениями имеет ровно $(n+1)$ различных неподвижных точек.

Задача 3.14. Докажите, что над алгебраически замкнутым полем любое линейное проективное преобразование имеет хоть одну неподвижную точку.

Задача 3.15. Докажите, что любое линейное проективное преобразование вещественного чётномерного проективного пространства имеет хоть одну неподвижную точку.

Задача 3.16. Рассмотрим пару прямых ℓ и ℓ' и отметим на каждой из них по три точки A, B, C и A', B', C'. Докажите, что существует единственное линейное проективное преобразование $\ell \longrightarrow \ell'$, переводящее соответственные точки друг в друга, и при помощи линейки постройте образ произвольной точки $p \in \ell$ при этом преобразовании.
Указание: этот сюжет более систематически будет разработан в n° 2.4.1.

§2. Коники.

2.1. Пространство коник. Пусть V – трёхмерное комплексное пространство, $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ – его проективизация, и q — квадратичная форма на V. С формой q связаны следующие три объекта:

поляризация — симметричная билинейная форма $\widetilde{q}(v,w) = \dfrac{1}{4}\,(q(v+w) - q(v-w))$;

корреляция — линейный оператор $\widehat{q}: \ V \longrightarrow V^*$, переводящий $v \in V$ в свёртку $i_v(q) \in V^*$, действующую на $w \in V$ по правилу $w \longmapsto \widetilde{q}(v,w)$;

проективная коника — множество нулей $Q = \{\, v \in \mathbb{P}(V) \mid q(v) = 0 \,\} \subset \mathbb{CP}_2$.

Задача 3.17. Убедитесь, что оператор, двойственный к корреляции

$$(V^*)^* \simeq V \xrightarrow{\widehat{q}^*} V^*$$

совпадает с $\widehat{q}$.

[4]условие $\alpha_i = 0$ означает, что $(n+1)$ векторов: вектор v и n векторов v_ν с $\nu \neq i$ лежат в одном n-мерном подпространстве, что запрещается условием

Задача 3.18. Докажите, что две коники совпадают тогда и только тогда, когда задающие их квадратичные формы пропорциональны.

Таким образом, коники взаимно однозначно соответствуют точкам проективного пространства $\mathcal{Q} = \mathbb{P}(S^2V^*) \simeq \mathbb{P}_5$, которое называется *пространством коник*. Множество всех коник, проходящих через данную точку v, представляет собой гиперплоскость (коразмерности 1) в этом пространстве, ибо уравнение $q(v) = 0$ при фиксированном v *линейно* по q. В частности, через любые пять точек на $\mathbb{P}_2$ всегда можно провести конику.

Задача 3.19. При каком условии на точки эта коника единственна? Как написать её уравнение, если заданы координаты пяти точек?

По теореме Лагранжа любая коника подходящим линейным проективным преобразованием может быть приведена к одному из трёх видов:

1) $t_0^2 + t_1^2 + t_2^2 = 0$ – *неособая* или *гладкая* коника;

2) $t_0^2+t_1^2 = 0$ – *распавшаяся* коника, т. е. пара пересекающихся прямых $t_0 = i\,t_1$ и $t_0 = -i\,t_1$;

3) $t_0^2 = 0$ – *двойная прямая*;

коники последних двух типов называются *особыми* или *вырожденными*. В пятимерном пространстве всех коник четырёхмерный локус особых коник выделяется *кубическим* уравнением $\det q = 0$. Вне двумерного подмножества, отвечающего двойным прямым, множество особых коник представляет собой гладкое многообразие.

Задача 3.20. Докажите это и проверьте, что касательное пространство к локусу особых коник в точке, соответствующей распавшейся конике, которая представляет собой пару прямых, пересекающихся в точке $p \in \mathbb{P}_2$, естественно отождествляется с множеством всех коник, проходящих через точку p.

2.2. Коника Веронезе. Реализуем пространство V как пространство квадратичных форм $V = S^2U^*$ на двумерном пространстве U. Плоскость $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ при этом интерпретируется как пространство квадрик на прямой $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$. Таковых квадрик имеется ровно два типа: *неособые*, вроде $t_0^2+t_1^2 = 0$, представляющие собой пару различных точек, и *особые*, вроде $t_0^2 = 0$, представляющие собой одну «двойную» точку. Множество особых квадрик можно, с одной стороны, задать квадратичным уравнением $\det(q) = 0$, а с другой стороны, представить как образ *отображения Веронезе* из $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U^*)$ в $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$, заданного правилом $\xi \longmapsto \xi^2$.

Если выбрать в U^* базис x_0, x_1 и соответствующий базис x_0^2, $2\,x_0x_1$, x_1^2 в $V = S^2U^*$, то квадрика $q(t) = a\,x_0^2 + 2\,b\,x_0x_1 + c\,x_1^2$ будет представляться однородными координатами $(a\colon b\colon c)$. Образ отображения Веронезе состоит из квадрик вида

$$q = (t_0x_0 + t_1x_1)^2 = t_0^2\,x_0^2 + 2\,t_0t_1\,x_0x_1 + t_1^2\,x_1^2$$

имеющих $a = t_0^2$, $\quad b = t_0t_1$, $\quad c = t_0^2$ — это параметрическое представление коники Веронезе. Явное же её уравнение $\det(q) = ac - b^2 = 0$.

Задача 3.21. Докажите, что отображение Веронезе

$$\mathbb{P}(V^*) = \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*) ,$$

которое переводит линейные формы от *трёх* переменных в квадратичные по правилу $\xi \longmapsto \xi^{\otimes 2}$, устанавливает биекцию между точками $\mathbb{P}_2^\times$ и множеством особых точек (отвечающих двойным прямым на $\mathbb{P}_2$) локуса особых коник в пространстве всех коник. Задайте множество двойных прямых в пространстве коник квадратными уравнениями.

2.3. Полярное соответствие. Корреляция $V \xrightarrow{\widehat{q}} V^*$, отвечающая невырожденной квадратичной форме q, является изоморфизмом и индуцирует биекцию между точками $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ и точками $\mathbb{P}_2^\times = \mathbb{P}(V^*)$, т. е. прямыми на исходном $\mathbb{P}_2$. Эта биекция называется *полярным соответствием* относительно коники q, а соответственные точка и прямая называются *полюсом* и *полярой* друг друга. Полярное соответствие симметрично и оборачивает включения. Первое означает, что точка v лежит на поляре точки w тогда и только тогда, когда w лежит на поляре v. Второе означает, что и точка пересечения двух прямых является полюсом прямой, проходящей через полюса этих двух прямых.

Задача 3.22. Убедитесь в этом!

Задача 3.23. Убедитесь, что для коники и прямой имеются ровно три возможных взаимных расположения: прямая лежит на конике, прямая пересекает конику по двум разным точкам и прямая *касается*[5] коники.

Задача 3.24. Проверьте также, что через каждую точку v неособой коники q проходит ровно одна касательная прямая, которая может быть описана как $\{\, w \in \mathbb{P}_2 \mid \widetilde{q}(v, w) = 0 \,\}$.

Задача 3.25. Проверьте, что через данную точку, не лежащую на неособой конике, проходят ровно две касательных прямых к этой конике, и прямая, соединяющая точки их касания с коникой, – это в точности поляра исходной точки относительно этой коники.

Задача 3.26. Опишите геометрическое место полюсов пучка прямых, проходящих через данную точку.

Задача 3.27. Докажите, то точки в $\mathbb{P}_2^\times$, соответствующие касательным к неособой конике $Q \subset \mathbb{P}_2$, тоже составляют неособую конику (она называется *двойственной* к данной), и напишите её уравнение, если известно уравнение исходной коники..

Задача 3.28. Сколько коник касается пяти данных прямых общего положения?

2.4. Гомографии. Пусть заданы два экземпляра $\mathbb{P}_1$, один с координатами $(x_0 : x_1)$, другой – с координатами $(y_0 : y_1)$. Отображение $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}_1$ называется *алгебраическим*, если в координатах оно задаётся формулами $y_i = \varphi_i(x_0, x_1)$, где φ_i – два однородных многочлена от x одинаковой степени и не обращающиеся в нуль одновременно. Взаимно однозначное алгебраическое отображение $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}_1$ называется *гомографией*.

Задача 3.29. Докажите, что всякая гомография $\mathbb{P}(U_1) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}(U_2)$ индуцируется линейным оператором $U_1 \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} U_2$.

Задача 3.30. Докажите, что существует единственная гомография, переводящая три заданных различных точки в три заданных различных точки.

2.4.1. Построение коник линейкой. Зафиксируем на $\mathbb{P}_2$ гладкую конику Q и прямую ℓ. Линейная проекция из произвольной точки $C \in Q$ на прямую ℓ устанавливает биекцию между точками коники Q и точками прямой ℓ, сопоставляя каждой точке $P \in Q$ точку пересечения ℓ с прямой CP, а самой точке C – точку пересечения ℓ с касательной, проходящей через C.

[5] т. е. пересекает её ровно по одной точке с кратностью два: ограничение квадратичной формы на прямую есть полный квадрат с единственным нулём в этой точке.

Если на плоскости задана коника Q и на ней отмечены две точки C_1 и C_2, то можно построить биективное отображение $\ell_1 \xrightarrow{\Gamma} \ell_2$ между любыми двумя прямыми $\ell_{1,2}$ сначала «свернув» прямую ℓ_1 на конику Q посредством проекции с центром в C_1, а затем «развернув» конику Q на ℓ_2 посредством проекции с центром в C_2 как на рис. 2. Если известны уравнения коники и прямых и явно указаны координаты точек $C_1, C_2 \in Q$, то координаты образа ΓP могут быть выражены через координаты P посредством решения одних только *линейных* уравнений.

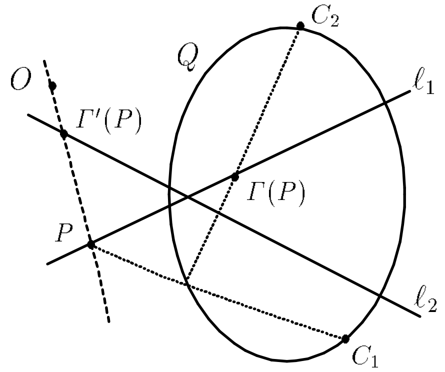

Рис. 2. Две гомографии.

Задача 3.31. Докажите, что Γ – гомография. Куда она переводит точки пересечения прямых между собой и с коникой?

Задача 3.32. Пусть имеются две прямые ℓ_1 и ℓ_2 и две точки C_1, C_2 не лежащие на них, и пусть $\ell_1 \xrightarrow{\Gamma} \ell_2$ – произвольная гомография. Докажите, что геометрическое место точек пересечения прямых (PC_1) и $(\Gamma P C_1)$ при $P \in \ell_1$ представляет собой квадрику, возможно, распавшуюся. Выясните, когда эта квадрика распадается.
Указание: Постройте 5 точек на этой квадрике, проследив за тремя точками $P_1, P_2, P_3 \in \ell_1$.

Задача 3.33. Пусть даны две прямые ℓ_1 и ℓ_2 и точка O вне них. Докажите, что отображение $\ell_1 \xrightarrow{\Gamma'} \ell_2$, переводящее точку $P \in \ell_1$ в точку $(OP) \cap \ell_2$ (см. рис. 2) является гомографией.

Задача 3.34. Укажите как одной линейкой построить плотное множество точек коники, проходящей через данные пять точек общего положения.
Указание: Скомбинируйте утверждения двух предыдущих задач, проведя квадрику Q через точку пересечения прямых $\ell_{1,2}$.

Задача 3.35. Докажите, что три точки пересечений продолжений противоположных сторон шестиугольника, вписанного в неособую конику, лежат на одной прямой (*теорема Паскаля*).

Задача 3.36. Сформулируйте о докажите двойственную теорему в $\mathbb{P}_2^\times$ (*теорему Брианшона*).

Задача 3.37. Как устроено в $\mathbb{P}_2^\times$ геометрическое место точек, отвечающих семейству прямых на $\mathbb{P}_2$, соединяющих соответственные пары точек заданной гомографии $\ell_1 \xrightarrow{\varphi} \ell_2$?

2.4.2. Пучки коник. Прямые и плоскости в пространстве коник $\mathcal{Q}$ называются, соответственно, *пучками* и *связками* коник. Например, множество всех коник, проходящих через четыре точки общего положения представляет собой пучок. В этом пучке есть три распавшихся коники, соответствующие трём различным способам провести пару прямых через четыре данные точки общего положения. Других особых коник в нём нет, поскольку кубическое уравнение $\det(q) = 0$ имеет не более трёх корней, когда q бегает по прямой.

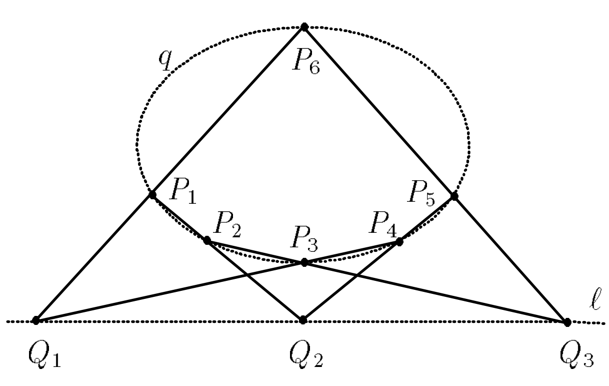

Рис. 3. К теореме Паскаля

Задача 3.38. Напишите семейство уравнений[6], описывающих все коники, проходящие через четыре точки с заданными координатами.

Задача 3.39. Докажите, что две неособых коники либо пересекаются по четырём точкам (с учётом кратностей), либо совпадают.

Задача 3.40. Сколько вырожденных коник содержится (а) в общем (б) в любом пучке коник?

Задача 3.41. Как устроено множество особых коник в общей связке коник?

§3. Комплексные проективные квадрики.

3.1. Обозначения. Пусть V – $(n+1)$-мерное комплексное пространство, $S^2(V^*)$ – пространство квадратичных форм на V. Как и в предыдущем параграфе, через q, $\widetilde{q}$ и $\widehat{q}$ мы будем обозначать, соответственно, квадратичную форму, её поляризацию и её корреляцию, а через $Q \subset \mathbb{P}_n$ – соответствующую *квадрику* $Q = \{\, v \in \mathbb{P}(V) \mid q(v) = 0 \,\}$.

Задача 3.42. Докажите, что квадрики взаимно однозначно соответствуют точкам проективного *пространства квадрик* $\mathcal{Q} = \mathbb{P}(S^2V^*)$ (т. е. проверьте, что $Q = Q'$ тогда и только тогда, когда $q = \lambda\, q'$).

Прямые и плоскости в проективном пространстве квадрик называются, как и ранее, *пучками* и *связками*. По теореме Лагранжа всякая квадрика в $\mathbb{P}_n$ линейной заменой координат приводится к сумме квадратов

$$t_0^2 + t_1^2 + \cdots + t_{r-1}^2 = 0\ .$$

Число r квадратов, входящих в эту сумму, называется *рангом* квадрики. Квадрики полного ранга $(n+1)$ называются *неособыми*, *невырожденными* или *гладкими*.

3.2. Касательное пространство. Для квадрики Q и прямой $\ell = \mathbb{P}(U)$, где $U \subset V$ – некое двумерное векторное подпространство, имеются ровно три возможных взаимных расположения:

1) $\mathrm{rk}\, q|_U = 2$, т. е. $q|_U$ – неособая квадрика на $\mathbb{P}_1$ и $Q \cap \ell$ – это пара различных точек;

2) $\mathrm{rk}\, q|_U = 1$, т. е. $q|_U$ – *двойная точка* на $\mathbb{P}_1$ и $Q \cap \ell$ – это одна точка «кратности два»;

3) $\mathrm{rk}\, q|_U = 0$, т. е. $q|_U \equiv 0$ и $\ell \subset Q$ — прямая лежит на квадрике;

в двух последних случаях прямая называется *касательной* к квадрике. Совокупность всех прямых, которые касаются квадрики в заданной точке $p \in Q$ называется *касательным пространством* к Q в точке p и обозначается T_pQ.

3.2.1. Лемма. *Прямая ℓ, проходящая через точку $v \in Q$ и произвольную точку $w \neq v$, касается Q тогда и только тогда, когда* $\widetilde{q}(v,w) = 0$.

Доказательство. Ограничение билинейной формы $\widetilde{q}$ на двумерное подпространство L, порождённое векторами v и w имеет матрицу Грама

$$G_{\widetilde{q}|_U} = \begin{pmatrix} \widetilde{q}(v,v) & \widetilde{q}(v,w) \\ \widetilde{q}(w,v) & \widetilde{q}(w,w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{q}(v,w) \\ \widetilde{q}(v,w) & * \end{pmatrix} \tag{3-1}$$

[6] т. е. одно уравнение, линейно зависящее от пары параметров – координат на $\mathbb{P}_1$

и условие касания $\operatorname{rk}\widetilde{q}|_U \leqslant 1 \iff \det G_{\widetilde{q}|_U} = 0 \iff \widetilde{q}(v,w) = 0$ □

3.2.2. Следствие. *Касательное пространство к точке $v \in Q$ задаётся уравнением*

$$T_vQ = \{\, w \in \mathbb{P}_n \mid \widetilde{q}(v,w) = 0 \,\} = \left\{ (w_0\colon w_1\colon \ \dots \ \colon w_n) \;\middle|\; \sum_{\nu=0}^{n} w_\nu \,\frac{\partial q}{\partial t_\nu}(v) = 0 \right\} \qquad (3\text{-}2)$$

и если $v \in \ker\left(V \xrightarrow{\widehat{q}} V^*\right)$, то $T_vQ = \mathbb{P}_n$, а если $v \notin \ker\left(V \xrightarrow{\widehat{q}} V^*\right)$, то T_vQ представляет собой гиперплоскость, задаваемую ненулевым линейным функционалом $\widehat{q}(v)$.

3.3. Строение особой коники. Точки $p \in Q$, для которых T_pQ представляет собой гиперплоскость в $\mathbb{P}_n$, называются *гладкими*. Остальные точки называются *особыми*.

Множество особых точек обозначается $Sing\,Q$ и называется *вершиной* квадрики Q. Оно представляет собой проективное подпространство $\mathbb{P}\left(\ker\left(V \xrightarrow{\widehat{q}} V^*\right)\right)$ и может быть описано уравнениями

$$\mathbb{P}(\ker\widetilde{q}) = \left\{ p \;\middle|\; \frac{\partial q}{\partial t_i}(p) = 0 \quad \text{при всех} \quad 0 \leqslant i \leqslant n \right\}.$$

3.3.1. Следствие. *Всякая прямая, проходящая через особую точку $v \in Sing\,Q$ и содержащая ещё хотя бы одну точку $w \in Q$, отличную от v, лежит на квадрике целиком.*

Доказательство. Матрица Грама (3-1) ограничения $\widetilde{q}$ на линейную оболочку векторов u и v будет тождественно нулевой. □

Задача 3.43. Докажите, что размерность вершины особой квадрики ранга r равна $(n-r)$.

Задача 3.44. Докажите, что пересечение $Q_H = Q \cap H$ квадрики Q ранга r с любым дополнительным к вершине $(r-1)$-мерным подпространством $H \subset \mathbb{P}_n$ является неособой квадрикой в этом подпространстве.

Задача 3.45. Докажите, что вершина квадрики может быть описана как пересечение всех касательных гиперплоскостей к её гладким точкам.

3.3.2. Следствие. *Комплексная проективная квадрика ранга r представляет собой конус*[7] *с вершиной $Sing\,Q$ и основанием в неособой квадрике Q_H, высекаемой Q на любой $(r-1)$-мерной плоскости H, дополнительной к $Sing\,Q$.* □

Задача 3.46. Докажите, что в пространстве всех квадрик локус особых квадрик является гладким многообразием в окрестности любой квадрики, которая является простым[8] конусом, и что касательное пространство к локусу особых квадрик в такой точке состоит состоит из всех квадрик, проходящих через вершину конуса.

3.4. Полярное соответствие. Другое следствие Лем.3.2.1 состоит в том, что видимый из точки $w \notin Q$ *контур*[9] квадрики Q, представляет собой сечение квадрики Q гиперплоскостью

$$\mathrm{pl}_wQ = \{\, u \in \mathbb{P}_n \mid \widetilde{q}(u,w) = 0 \,\} = \left\{ (u_0\colon u_1\colon \ \dots \ \colon u_n) \;\middle|\; \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu \,\frac{\partial q}{\partial t_\nu}(w) = 0 \right\} \qquad (3\text{-}3)$$

[7] т. е. объединение всех прямых, пересекающих как *вершину* так и *основание* конуса

[8] т. е. с вершиной в одной точке

[9] т. е. геометрическое место точек соприкосновения с Q всевозможных касательных, проходящих через точку $w \notin Q$

Гиперплоскость $\mathrm{pl}_w Q$ называется *полярой* точки w относительно квадрики Q и представляет собой проективизацию ядра линейного функционала $\widehat{q}(w) \,:\, u \longmapsto q(w,u)$. Если квадрика неособая, то корреляция $V \xrightarrow{\widehat{q}} V^*$ является изоморфизмом, и индуцирует взаимно однозначное *полярное соответствие* $\mathbb{P}_n \xrightarrow{\widehat{q}} \mathbb{P}_n^\times$. При этом сама квадрика Q может быть охарактеризована как геометрическое место точек, лежащих на своих полярах.

Задача 3.47. На «школьной» евклидовой плоскости нарисован круг. Циркулем и линейкой постройте поляру данной точки, лежащей внутри круга, и полюс данной прямой, не пересекающей круг.

3.5. Подпространства, лежащие на неособой квадрике. Подпространство $L = \mathbb{P}(W)$ лежит на квадрике $Q \subset \mathbb{P}(V)$ тогда и только тогда, когда корреляция $V \xrightarrow{\widehat{q}} V^*$ переводит подпространство $W \subset V$ внутрь его аннулятора $\mathrm{Ann}\,(W) \subset V^*$. Поскольку для неособой квадрики $\widehat{q}$ является изоморфизмом, имеем:

$$\dim W = \dim \widehat{q}(W) \leqslant \dim \mathrm{Ann}\,(W) = \dim V - \dim W\ ,$$

откуда $\dim W \leqslant \dfrac{1}{2}\dim V$. Таким образом, имеет место

3.5.1. Лемма. *Невырожденная квадрика в $\mathbb{P}_n$ не содержит проективных подпространств размерности большей, чем $[(n-1)/2]$.* □

3.5.2. Лемма. *Пересечение неособой квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ с касательным пространством к произвольной точке $P \in Q$ представляет собой конус с вершиной в точке P над неособой квадрикой, высекаемой исходной квадрикой Q на любом $(n-2)$-мерном подпространстве дополнительном к P в T_PQ.*

Доказательство. Пусть P соответствует вектору $v \in V$. Тогда $T_PQ = \mathbb{P}(W)$, где $W = \{\, w \mid \widetilde{q}(v,w) = 0\,\}$. Множество особых точек квадрики $Q \cap W$ состоит из всех векторов $u \in W$, таких что $\widetilde{q}(u,w) = 0$ для всех $w \in W$. Но аннулирующий заданную гиперплоскость линейный функционал на V единствен с точностью до пропорциональности. Тем самым, в следствие невырожденности $\widehat{q}$ всякий такой вектор u пропорционален вектору v. Последний же по определению аннулирует W и лежит в W. Мы проверили, что ограничение квадратичной формы q на W имеет одномерное ядро, что и требовалось. □

3.5.3. Следствие. *Через каждую точку P невырожденной квадрики в $\mathbb{P}_n$ проходит непустое множество $[(n-1)/2]$-мерных плоскостей. Мощность этого множества одна и та же для всех точек P, и его элементы взаимно однозначно соответствуют всевозможным $[(n-3)/2]$-мерным плоскостям, лежащим на невырожденной квадрике в $\mathbb{P}_{n-2}$.*

Доказательство. Действительно, каждая $[(n-1)/2]$-мерная плоскость лежащая на Q и проходящая через точку $P \in Q$ лежит в касательном пространстве, и по предыдущей лемме представляет собой линейную оболочку точки P и любой плоскости размерности $[(n-1)/2] - 1 = [(n-3)/2]$, лежащей на неособой квадрике, высекаемой исходной квадрикой Q на любом дополнительном к P $(n-2)$-мерном подпространстве в T_PQ. □

Например, через каждую точку невырожденной квадрики в $\mathbb{P}_3$ проходит две прямые, а через каждую точку невырожденной квадрики в $\mathbb{P}_4$ проходит однопараметрическое семейство прямых, естественно параметризуемое гладкой коникой. Двумерных же плоскостей на этих квадриках нет.

3.6. Квадрика Сегре в $\mathbb{P}_3$. Интерпретируем комплексное четырёхмерное пространство V как пространство линейных операторов

$$V = \mathrm{Hom}(U_-, U_+) \simeq U_-^* \otimes U_+$$

между двумя двумерными комплексными пространствами $U_\pm$ и рассмотрим в нём подмножество *ненулевых вырожденных операторов*. Всякий такой оператор f имеет $\mathrm{rk}\, f = 1$, и стало быть, разложим, т. е. представляется в виде $\zeta \otimes u$, где $u \in U_+$ порождает $\mathrm{im}\, f$, а $\zeta \in U_-^*$ является аннулятором подпространства $\ker f$ (такие u и ζ определены однозначно с точностью до пропорциональности).

Следовательно, проективизация множества ненулевых вырожденных операторов, с одной стороны, задаётся в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ квадратичным уравнением $\det f = 0$, а с другой стороны, является образом *отображения Сегре* из $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U_-^*) \times \mathbb{P}(U_+)$ в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(U_-^* \otimes U_+)$, действующего по правилу $(\zeta, u) \longmapsto \zeta \otimes u$. Отметим, что отображение Сегре переводит «координатные» прямые вида $\mathbb{P}_1 \times \{u\}$ и $\{\zeta\} \times \mathbb{P}_1$, лежащие на $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$, в прямые вида $\mathbb{P}\left(U_-^* \otimes u\right)$ и $\mathbb{P}\left(\zeta \otimes U_+\right)$, содержащиеся в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(U_-^* \otimes U_+)$. Из сказанного вытекает

3.6.1. Лемма. *Отображение Сегре задаёт биекцию между $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ и невырожденной квадрикой $\mathbb{P}_3$, при которой два семейства прямолинейных образующих $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ переходят в два семейства прямых, заметающих квадрику так, что все прямые, лежащие в одном семействе попарно скрещиваются, любые две прямые из разных семейств пересекаются, и через каждую точку квадрики проходит ровно одна прямая из одного семейства и ровно одна прямая из другого.* □

Задача 3.48. Докажите, что через девять точек в $\mathbb{P}_3$ всегда можно провести квадрику. При каком условии на точки эта квадрика будет (а) невырожденной (б) единственной?

Задача 3.49. Докажите, что через три попарно скрещивающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$ можно провести единственную квадрику, и что эта квадрика будет невырождена.

Задача 3.50. Опишите геометрическое место точек, заметаемых всевозможными прямыми, пересекающими каждую из трёх заданных попарно скрещивающихся прямых в $\mathbb{P}_3$.

Задача 3.51. Сколько прямых пересекает четыре заданных попарно скрещивающихся прямых (а) в проективном пространстве $\mathbb{CP}_3$ (б) в аффинном пространстве $\mathbb{R}_3$? Укажите все возможные ответы и выясните, какие из них устойчивы относительно малых шевелений исходных четырёх прямых.

3.6.2. Формулы в координатах. Если выбрать в U_- и U_+ базисы и записывать операторы матрицами $f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ в этих базисах, то квадрика Сегре будет задаваться уравнением $ad - bc = 0$. Отображение Сегре сопоставляет линейной форме $\zeta = \xi_0 x_0 + \xi_1 x_1$ и вектору $u = t_0 e_0 + t_1 e_1$ оператор

$$\xi \otimes u = \xi_0 t_0\, x_0 \otimes e_0 + \xi_0 t_1\, x_0 \otimes e_1 + +\xi_1 t_0\, x_1 \otimes e_0 + \xi_1 t_1\, x_1 \otimes e_1 = \begin{pmatrix} \xi_0 t_0 & \xi_1 t_0 \\ \xi_0 t_1 & \xi_1 t_1 \end{pmatrix}$$

и тем самым задаёт параметризацию квадрики $ac - bd = 0$ по формулам

$$a = \xi_0 t_0\,, \quad b = \xi_0 t_1\,, \quad c = \xi_1 t_0\,, \quad d = \xi_2 t_0\,.$$

Две прямолинейных образующих, проходящих через точку $(\xi_0 t_0 \colon \xi_0 t_1 \colon \xi_1 t_0 \colon \xi_2 t_0)$ задаются в однородных координатах $(a\colon b\colon c\colon d)$ системами уравнений

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{t_0}{t_1} \qquad \text{и} \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{\xi_0}{\xi_1}\,.$$

так что движению вдоль прямолинейной образующей одного типа соответствует изменение коэффициента пропорциональности между строками вырожденной 2×2-матрицы, а движению вдоль прямолинейной образующей другого типа соответствует изменение коэффициента пропорциональности между столбцами.

3.6.3. Ещё раз о дробно линейных преобразованиях прямой. Поскольку всякая невырожденная квадрика в $\mathbb{P}_3$ может быть заменой координат превращена в детерминантальную квадрику $ac - bd = 0$, задание невырожденной квадрики $Q \subset \mathbb{P}_3$ отождествляет $\mathbb{P}_3$ с пространством линейных проективных преобразований из прямой $\mathbb{P}_1^-$, параметризующей одно семейство прямолинейных образующих Q, в прямую $\mathbb{P}_1^+$, параметризующую другое семейство. При этом точки квадрики Q будут изображать вырожденные операторы (они задают проекции, сжимающие всё $\mathbb{P}_1^-$ в точку на $\mathbb{P}_1^+$), а точки дополнения $\mathbb{P}_3 \setminus Q$ будут изображать взаимно однозначные линейные проективные преобразования.

Задача 3.52. Укажите явную геометрическую конструкцию, сопоставляющую точке $P \in \mathbb{P}_3 \setminus Q$ гомографию $\mathbb{P}_1^- \longrightarrow \mathbb{P}_1^+$.

§4. Квадрика Плюккера в $\mathbb{P}_5$.

4.1. Плюккерово вложение. Множество прямых в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$, или, что то же самое, множество двумерных подпространств U в четырёхмерном пространстве V, называется *грассманианом* $\mathrm{Gr}(2,4)$. *Отображение Плюккера* $\mathrm{Gr}(2,4) \longrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 V) = \mathbb{P}_5$ сопоставляет двумерному подпространству $U \subset V$ одномерное подпространство $\Lambda^2 U \subset \Lambda^2 V$.

Задача 3.53. Докажите, что отображение Плюккера инъективно.

Если выбрать в U базис $\{u_1, u_2\}$, то $\Lambda^2 U$ будет порождаться разложимым бивектором $\omega_U = u_i \wedge u_2 \in \Lambda^2 V$. При выборе другого базиса в U этот бивектор будет умножаться на ненулевую константу – определитель матрицы перехода. Таким образом, отображения Плюккера устанавливает биекцию между $\mathrm{Gr}(2,4)$ и проективизацией множества разложимых бивекторов в $\Lambda^2 V$.

4.2. Плюккерова квадрика. На $\Lambda^2 V$ имеется естественный класс пропорциональных билинейных симметричных форм $\widetilde{q}$, заданных правилом

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \widetilde{q}(\omega_1, \omega_2) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \qquad \forall\, \omega_1 . \omega_2 \in \Lambda^2 V\ , \tag{4-4}$$

где $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ фиксированный базисный вектор в одномерном пространстве $\Lambda^4 V$. При выборе другого базисного 4-вектора форма $\widetilde{q}$ будет умножаться на ненулевую константу. Квадрика, задаваемая классом пропорциональных форм $\widetilde{q}$ называется *квадрикой Плюккера*. Её инвариантное определение таково:

$$Q = \{\, \omega \in \Lambda^2 V \mid q(\omega) = \omega \wedge \omega = 0 \,\}$$

Задача 3.54. Убедитесь, что форма $\widetilde{q}$ невырождена и симметрична, и укажите базис, двойственный относительно этой формы к стандартному базису $e_{ij} = e_i \wedge e_j$ в $\Lambda^2 V$.

Задача 3.55. Какова в вещественном случае сигнатура формы $\widetilde{q}$?

Если зафиксировать в V базис e_i, а в $\Lambda^2 V$ – базис $e_{ij} = e_i \wedge e_j$ с $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, то в координатах x_{ij} относительно последнего квадрика Плюккера будет задаваться уравнением

$$x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23} = 0\ .$$

4.3. Лемма. *Квадрика Плюккера совпадает с проективизацией множества разложимых бивекторов.*

Доказательство. Рассмотрим ненулевой бивектор $\omega \in \Lambda^2 V$ как билинейную кососимметричную форму на V^* и приведём её к каноническому виду, т. е. выберем в V^* базис x_i, в котором её матрица Грама состоит из 2×2-блоков и имеет вид

$$\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \quad , \quad \text{где} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Если e_i – двойственный к x_i базис в V, то в первом случае $\omega = e_1 \wedge e_2$ разложим и $\omega \wedge \omega = 0$, а во втором случае $\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$ неразложим и $\omega \wedge \omega = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0$. $\square$

4.3.1. Следствие. *Отображение Плюккера отождествляет множество прямых в $\mathbb{P}_3$ с точками невырожденной квадрики в $\mathbb{P}_5$ — квадрики Плюккера.* $\square$

Задача 3.56. Могут ли числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 представлять собой полный набор максимальных миноров какой-нибудь комплексной 2×4-матрицы?

4.4. Циклы Шуберта. Проекция квадрики Плюккера Q из любой точки $p \in Q$ на любую дополнительную к p гиперплоскость H устанавливает гомеоморфизм между четырёхмерным аффинным пространством $\mathbb{A}^4 = H \setminus (H \cap T_pQ)$ и плотным открытым подмножеством в Q, дополнительным к трёхмерному замкнутому подмножеству $Q \cap T_pQ$, которое мы обозначим через $\sigma_{1,0}$. Оно представляет собой конус с вершиной в точке p над неособой квадрикой G, которую Q высекает на любом *дополнительном* к p трёхмерном подпространстве $\mathbb{P}_3 \subset T_pQ$ (см. рис. 4).

Выберем на G произвольную точку $q \in G$ и проведём пару плоскостей $\sigma_{2,0}$ и $\sigma_{1,1}$, натянутых на p и две проходящих через q прямолинейных образующих квадрики G. Эти плоскости пересекутся по прямой (pq), которую мы обозначим $\sigma_{2,1}$. Проектируя G из q на плоскость $\mathbb{P}_2 \subset \mathbb{P}_3$, мы получаем, как и выше, гомеоморфизм между $G \setminus (\sigma_{2,0} \cup \sigma_{1,1}) = G \setminus (G \cap T_qG)$ и $\mathbb{A}^2$. Стало быть, $\sigma_{1,0} \setminus (\sigma_{2,0} \cup \sigma_{1,1}) \simeq \mathbb{A}^3$, ибо представляет собой прямое произведение предыдущего $\mathbb{A}^2$ на $\mathbb{P}_1 \setminus \{p\} = \mathbb{A}^1$. Дополнения $\sigma_{2,0} \setminus \sigma_{2,1}$ и $\sigma_{1,1} \setminus \sigma_{2,1}$ гомеоморфны $\mathbb{A}^2$, и наконец, $\sigma_{2,1} = \mathbb{A}^1 \sqcup \sigma_{2,2}$, где $\sigma_{2,2} = \{p\}$.

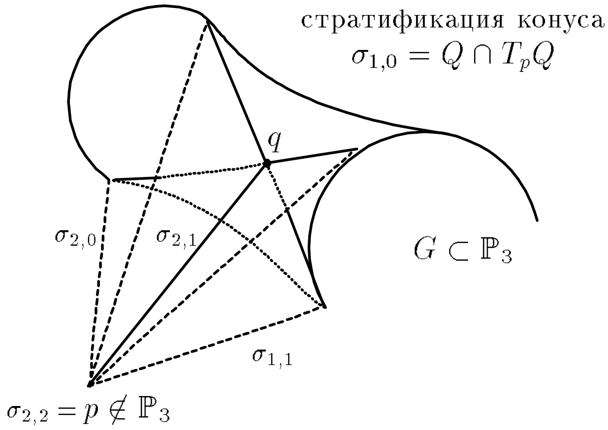

Рис. 4. Циклы Шуберта.

Итак, мы имеем разложение квадрики Плюккера в дизъюнктное объединение открытых в своём замыкании клеток

$$\mathrm{Gr}(2,4) = \mathbb{A}^4 \sqcup \mathbb{A}^3 \sqcup \mathbb{A}^2 \sqcup \mathbb{A}^2 \sqcup \mathbb{A}^1 \sqcup \mathbb{A}^0$$

называемых *клетками Шуберта*. Их замыкания $\sigma_{\lambda_1,\lambda_2}$ называются *циклами Шуберта*[10], и примыкают друг к другу в соответствии с диаграммой (4-5) ниже.

Задача 3.57. Убедитесь, что целочисленные гомологии $\mathrm{Gr}(2,4)$ свободно порождаются циклами Шуберта, т. е. все нечётные группы тривиальны, а чётные суть $H_0 = H_2 = H_6 = H_8 = \mathbb{Z}$ и $H_4 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

4.5. Геометрия Плюккеровой квадрики. Предыдущую картину можно существенно обогатить, поскольку будучи естественными геометрическими фигурами на Плюккеровой квадрике, циклы Шуберта изображают замечательные семейства прямых в $\mathbb{P}_3$.

4.5.1. Лемма. *Пусть ω_1 и ω_2 — разложимые бивекторы, соответствующие двум разным двумерным подпространствам $U_1, U_2 \subset V$. Тогда условие $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$ равносильно условию $\widetilde{q}(\omega_1, \omega_2) = 0$.*

Доказательство. Два разных двумерных подпространства в четырёхмерном пространстве либо составляют прямую сумму, либо имеют одномерное пересечение. В первом случае в V имеется базис e_i, в котором $\omega_1 = e_1 \wedge e_2$, а $\omega_2 = e_3 \wedge e_4$, и стало быть, $\omega_1 \wedge \omega_2 = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0$ Во втором случае можно считать, что $\omega_1 = e_1 \wedge e_2$, а $\omega_2 = e_1 \wedge e_3$, и легко проверить, что $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$. □

4.5.2. Трёхмерный цикл Шуберта $Q \cap T_pQ$, согласно лемме, изображает множество всех прямых в $\mathbb{P}_3$, пересекающих прямую ℓ, изображаемую точкой p. Локализованный таким образом цикл $\sigma_{1,0}$ мы будем обозначать $\sigma_{1,0}(\ell)$.

4.5.3. Пучки и связки прямых в $\mathbb{P}_3$. Множества прямых в $\mathbb{P}_3$, изображаемые на Q прямыми или плоскостями, называются, соответственно *пучками* и *связками* прямых. Через каждую точку $p_\ell \in Q$ проходят два 1-параметрических семейства плоскостей, отвечающих двум семействам прямолинейных образующих квадрики на рис. 4 и одно 2-параметрическое семейство прямых, параметризованное точками этой квадрики. Согласно Лем.4.5.1 любые две прямые из одной связки пересекаются. С другой стороны, связка однозначно восстанавливается по любой тройке прямых ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, таких что соответствующие им точки $p_1, p_2, p_3 \in Q$ не лежат на одной прямой. Будучи попарно пересекающимися, эти три прямые либо проходят через одну точку $P \in \mathbb{P}_3$, либо лежат в одной плоскости $\pi \subset \mathbb{P}_3$.

Задача 3.58. Докажите, что в первом случае связка будет состоять из всех прямых в $\mathbb{P}_3$, проходящих через P.

Задача 3.59. Докажите, что во втором случае связка состоит из всех прямых, содержащихся в плоскости π.

Связка первого типа называется α-связкой, и соответствующий цикл Шуберта обозначается $\sigma_{2,0}(P)$. Связка второго типа называется β-связкой, а соответствующий цикл Шуберта

[10]причина, по которой мы используем для них столь витиеватые обозначения $\sigma_{\lambda_1,\lambda_2}$ выяснится в следующей лекции; на самом деле индексы λ_1, λ_2 пробегают всевозможные диаграммы Юнга, умещающиеся в прямоугольнике 2×2

обозначается через $\sigma_{1,1}(\pi)$. Тем самым, на квадрике Плюккера лежит *два разных* семейства 2-плоскостей. При этом любые две плоскости одного типа пересекаются по точке

$$\sigma_{2,0}(P) \cap \sigma_{2,0}(R) = \sigma_{2,2}((PR)) \quad , \qquad \sigma_{1,1}(\pi) \cap \sigma_{1,1}(\varrho) = \sigma_{2,2}(\pi \cap \varrho) \ ,$$

а любые две плоскости разных типов либо вообще не пересекаются (так происходит в общем случае, когда $P \notin \pi$), либо пересекаются по прямой – так происходит, когда $P \in \pi$. Тем самым, всякий пучок прямых в $\mathbb{P}_3$, будучи пересечением двух связок, состоит из всех прямых, которые проходят через одну точку P и лежат в одной плоскости π. Соответствующий цикл Шуберта обозначается $\sigma_{2,1}(P, \pi)$.

Итак, для каждого *флага* $P \in \ell \subset \pi \subset \mathbb{P}_3$ мы имеем диаграмму вложений

$$\begin{tikzcd}
 & & \sigma_{2,0}(P) \arrow[dr, hook] & & \\
\sigma_{2,2}(\ell) \arrow[r, hook] & \sigma_{2,1}(P,\pi) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \sigma_{1,0}(\ell) \arrow[r, hook] & Q \\
 & & \sigma_{1,1}(\pi) \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd} \tag{4-5}$$

и задача

Задача 3.60. Докажите, что проективная группа $PGL(\mathbb{P}_3)$ транзитивно действует на множестве всех *флагов* $P \in \ell \subset \pi \subset \mathbb{P}_3$.

показывает, что локализованные в разных местах квадрики Q однотипные циклы Шуберта конгруэнтны в самом сильном смысле слова (в частности, гомологичны).

4.5.4. Пересечения циклов Шуберта в кольце (ко)гомологий грассманиана $\mathrm{Gr}(2,4)$ легко вычисляются из геометрических соображений. Мы уже видели, что $\sigma_{2,0}^2 = \sigma_{1,1}^2 = \sigma_{22}$, и что $\sigma_{2,0}\sigma_{1,1} = 0$. Очевидно, что 0-мерный цикл $\sigma_{2,2}$ пересекается нулевым образом со всеми прочими циклами положительной коразмерности, а 1-мерный цикл имеет ненулевое пересечение только с трёхмерным.

Задача 3.61. Убедитесь, что $\sigma_{2,1}\sigma_{1,0} = \sigma_{2,2}$.

Задача 3.62. Убедитесь, что $\sigma_{1,0}\sigma_{2,0} = \sigma_{1,0}\sigma_{1,1} = \sigma_{2,1}$ явно предъявив пучки прямых, по которым заданные α- и β-связки пересекаются с множеством всех прямых, пересекающих заданную прямую ℓ.

Наконец, самопересечение трёхмерного цикла гомологично сумме двух двумерных:

$$\sigma_{1,0}^2 = \sigma_{2,0} + \sigma_{1,1}$$

Действительно, пересечение $\sigma_{1,0}(\ell_1) \cap \sigma_{1,0}(\ell_2)$ двух достаточно общих трёхмерных циклов представляет собой невырожденную квадрику G (как на рис. 4), высекаемую квадрикой Q в трёхмерном пространстве $T_{p_1}Q \cap T_{p_2}Q$, где p_1 и p_2 — это изображения прямых ℓ_1 и ℓ_2 на Q. Точки G — это прямые в $\mathbb{P}_3$, пересекающие пару скрещивающихся прямых ℓ_1, ℓ_2. Рассмотрим какую-нибудь одну такую прямую ℓ (см. рис. 5), изображаемую на G точкой q.

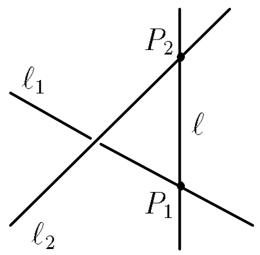

Рис. 5.

Задача 3.63. Убедитесь, что две прямолинейных образующих квадрики G, проходящие через точку q — это пучок прямых с центром в $P_1 = \ell \cap \ell_1$, лежащий в плоскости, натянутой на ℓ и ℓ_1, и пучок прямых с центром в $P_2 = \ell \cap \ell_2$, лежащий в плоскости, натянутой на ℓ и ℓ_2.

Задача 3.64. Убедитесь, что две плоскости, натянутые на p_1 и проходящие через точку q прямолинейные образующие G, — это α-связка с центром в $P_1 = \ell \cap \ell_1$, и β-связка в плоскости, натянутой на ℓ и ℓ_1.

Будем поворачивать прямую ℓ_2 вокруг P_2 до тех пор, пока она не совпадёт с ℓ. При этом точка p_2 продеформируется в точку q, цикл $\sigma_{1,0}(\ell_2)$ – в цикл $\sigma_{1,0}(\ell)$, а пересечение $G = \sigma_{1,0}(\ell_1) \cap \sigma_{1,0}(\ell_2)$ – в особую квадрику, изображающую множество всех прямых из $\mathbb{P}_3$, пересекающих как ℓ, так и ℓ_1, и представляющую собой объединение α-связки с центром в $P_1 = \ell \cap \ell_1$, и β-связки, лежащей в плоскости, натянутой на ℓ и ℓ_2, что и утверждалось.

4.5.5. Исчисление Шуберта. Умножение классов гомологий грассманиана $\mathrm{Gr}(2,4)$, индуцированное полученной выше «таблицей умножения» базисных циклов называется *исчислением Шуберта* и бывает полезно при решении геометрических задач. Например, для подсчёта числа прямых, которое пересекают данные четыре прямые общего положения в $\mathbb{P}_3$, достаточно заметить, что искомое число есть количество нульмерных циклов $\sigma_{2,2}$ в разложении четырёхкратного самопересечения $\sigma_{1,0}^4$. Действуя по предыдущим формулам, получаем:

$$\sigma_{1,0}^4 = (\sigma_{2,0} + \sigma_{1,1})^2 = \sigma_{2,0}^2 + \sigma_{1,1}^2 = 2\,\sigma_{22}\ .$$

4.6. Взаимодействие Плюккера, Сегре и Веронезе. Пусть теперь пространство V интерпретируется по Сегре как $V = \mathrm{Hom}(U_-, U_+)$. Разложим $V^{\otimes 2} = U_-^{*\otimes 2} \otimes U_+^{\otimes 2}$ в сумму симметрической и кососимметрической составляющих:

$$\begin{gathered}\overbrace{\left(S^2U_-^* \oplus \Lambda^2U_-^*\right)}^{U_-^*\otimes U_-^*} \otimes \overbrace{\left(S^2U_+ \oplus \Lambda^2U_+\right)}^{U_+\otimes U_+} \simeq \\ \simeq \underbrace{\left(\left(S^2U_-^* \otimes S^2U_+\right) \oplus \left(\Lambda^2U_-^* \otimes \Lambda^2U_+\right)\right)}_{S^2V} \bigoplus \underbrace{\left(\left(S^2U_-^* \otimes \Lambda^2U_+\right) \oplus \left(\Lambda^2U_-^* \otimes S^2U_+\right)\right)}_{\Lambda^2V}\end{gathered} \tag{4-6}$$

Вложение Сегре $\mathbb{P}_1^- \times \mathbb{P}_1^+ = \mathbb{P}(U_-^*) \times \mathbb{P}(U_+) \xrightarrow{(\zeta,u)\mapsto\zeta\otimes u} \mathbb{P}(U_-^* \otimes U_+)$, переводит координатные прямые на $\mathbb{P}_1^- \times \mathbb{P}_1^+$ в прямолинейные образующие квадрики Сегре $G \subset \mathbb{P}(V)$ по формулам

$$\mathbb{P}_1^- \times u \longmapsto \mathbb{P}(U_-^* \otimes u) \qquad\qquad \zeta \times \mathbb{P}_1^+ \longmapsto \mathbb{P}(\zeta \otimes U_+)\ .$$

Вложение Плюккера превращает эти прямые в точки плюккеровой квадрики по формулам

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U_-^* \otimes u) &\longmapsto \mathbb{P}(\Lambda^2U_-^* \otimes u^{\otimes 2}) \in \mathbb{P}(\Lambda^2U_-^* \otimes S^2U_+) \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_+ \subset \mathbb{P}(\Lambda^2V)\\ \mathbb{P}(\zeta \otimes U_+) &\longmapsto \mathbb{P}(\zeta^{\otimes 2} \otimes \Lambda^2U_+) \in \mathbb{P}(S^2U_-^* \otimes \Lambda^2U_+) \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_- \subset \mathbb{P}(\Lambda^2V)\end{aligned}$$

Таким образом, первое семейство прямолинейных образующих, параметризованное точками $u \in \mathbb{P}_1^+$, изобразится на плюккеровой квадрике плоской коникой

$$\Lambda_+ \cap Q \stackrel{\text{def}}{=} q_+ \simeq \mathbb{P}_1^+\ ,$$

вложенной по Веронезе как $u \mapsto u^{\otimes 2}$ в двумерную плоскость $\Lambda_+ \simeq \mathbb{P}(S^2U_+)$, а второе семейство, параметризованное точками $\zeta \in \mathbb{P}_1^-$, изобразится коникой

$$\Lambda_- \cap Q \overset{\text{def}}{=} q_- \simeq \mathbb{P}_1^- \,,$$

вложенной по Веронезе как $\zeta \mapsto \zeta^{\otimes 2}$ в двумерную плоскость $\Lambda_- \simeq \mathbb{P}(S^2U_-^*)$. Условно это можно изобразить коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(U_+) \arrow[rr, hook, "\text{Веронезе}"] & & \mathbb{P}(S^2U_+) \simeq \Lambda_+ \arrow[d, hook] \\
\mathbb{P}_1^+ \times \mathbb{P}_1^- \arrow[u, "\pi_+"] \arrow[d, "\pi_-"'] \arrow[r, "\text{Сегре}", "\sim"'] & G \subset \mathbb{P}\mathrm{Hom}(U_-,U_+) \arrow[r, dashed, "\text{Плюккер}"] & Q \subset \mathbb{P}\begin{pmatrix} \Lambda^2U_-^* \otimes S^2U_+ \\ \oplus \\ S^2U_-^* \otimes \Lambda^2U_+ \end{pmatrix} \\
\mathbb{P}(U_-^*) \arrow[rr, hook, "\text{Веронезе}"'] & & \mathbb{P}(S^2U_-^*) \simeq \Lambda_- \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

где Плюккер отображает *прямые* на $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}\mathrm{Hom}(U_-,U_+)$ в *точки* квадрики $Q \subset \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}\left(\Lambda^2\mathrm{Hom}(U_-,U_+)\right)$.

Задача 3.65. Чем изобразится на плюккеровой квадрике

а) пучок прямых с центром в точке $p = (\zeta, u) \in G$, лежащий в T_pG?

б) множество всех прямых, касающихся G?

(последнее множество называется *специальным квадратичным комплексом* прямых в $\mathbb{P}_3$).

Симметричная билинейная форма $\widetilde{g}$ на V, задающая невырожденную квадрику $G \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ стандартным образом индуцирует симметричную билинейную форму $\Lambda^2\widetilde{g}$ на Λ^2V, действующую на разложимых бивекторах по правилу

$$\Lambda^2\widetilde{g}(\, v_1 \wedge v_2 \,,\, w_1 \wedge w_2 \,) = \det\begin{pmatrix} \widetilde{g}(v_1,w_1) & \widetilde{g}(v_1,w_2) \\ \widetilde{g}(v_2,w_1) & \widetilde{g}(v_2,w_2) \end{pmatrix}$$

Соответствующая квадратичная форма задаёт в $\mathbb{P}(\Lambda^2V)$ невырожденную квадрику, обозначаемую Λ^2G.

Задача 3.66. Докажите, что $Q \cap \Lambda^2G$ изображает множество всех касательных к G прямых в $\mathbb{P}_3$.

Задача 3.67. Докажите, что в пучке квадрик, натянутом на Λ^2G и Q в $\mathbb{P}_5$, есть ровно две особых квадрики: конус с вершиной Λ_- над коникой q_+ и конус с вершиной Λ_+ над коникой q_-.

4.6.1. Координатная запись: Ходжева звёздочка. Если в пространстве V зафиксировать *ортонормальный*[11] базис для $\widetilde{g}$, то бивекторы $e_{ij} = e_i \wedge e_j$ с $i < j$ составят ортонормальный базис для $\Lambda^2\widetilde{g}$ в Λ^2V. Зафиксируем в Λ^4V элемент объёма $\omega = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$, построенный по ортонормальному базису e_i, и рассмотрим плюккерову билинейную форма $\widetilde{q}$, ассоциированную с этим элементом объёма.

[11]обратите внимание, что базис Сегре, где квадрика задаётся детерминантным уравнением *не является* ортонормальным

Пара форм $\widetilde{q}$ и $\Lambda^2\widetilde{g}$ стандартным образом индуцирует линейный оператор $\Lambda^2 V \xrightarrow{*} \Lambda^2 V$, однозначно задаваемый условием $\widetilde{q}(\omega_1, *\omega_2) = \Lambda^2\widetilde{g}(\omega_1, \omega_2)$, или более явно, формулой

$$\omega_1 \wedge *\omega_2 = \Lambda^2\widetilde{g}(\omega_1, \omega_2) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \qquad \forall \omega_1, \omega_2$$

Этот оператор называется *звёздочкой Ходжа* и действует на ортонормальный базис по правилам:

$$e_{12} \longleftrightarrow e_{34} \qquad e_{13} \longleftrightarrow -e_{24} \qquad e_{14} \longleftrightarrow e_{23}$$

Задача 3.68. Проверьте, что $*$ является инволюцией с трёхмерным собственным подпространством с собственным значением $+1$ и трёхмерным собственным подпространством с собственным значением -1. Укажите собственный базис явно.

Эти собственные подпространства называются пространствами *автодуальных* и *антиавтодуальных* бивекторов. В $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ они изображаются парой дополнительных двумерных плоскостей.

Задача 3.69. Проверьте, что эти плоскости совпадают с описанными выше плоскостями Λ_+ и Λ_-, которые высекают на квадрика Плюккера коники q_+ и q_-, изображающие два семейства прямолинейных образующих квадрики Сегре.

Отметим, что выбор знака у $\Lambda_\pm$ при ходжевом координатном подходе диктуется выбором ориентирующего 4-вектора на V. При перемене местами, скажем, векторов e_2 и e_3, собственные подпространства оператора $*$ поменяются ролями. При геометрическом подходе Сегре этот выбор знака определяется тем, какое из двух семейств прямолинейных образующих квадрики Сегре считать первым, а какое вторым: пространства $\Lambda_\pm$ поменяются ролями, если переставить местами пространства $U_\pm$.

Связь между двумя подходами на координатном языке состоит в замене ортонормального базиса e_i, где $\widetilde{g}$ записывается как $\sum x_i^2 = 0$, на «матричный» базис $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}$, где $\widetilde{g}$ записывается как $y_{11}y_{22} = y_{12}y_{21}$.

Задача 3.70. Опишите явными формулами

(а) хоть одну (б) все

такие замены базиса.