Лекция 4
Спиноры, кватернионы, группы и алгебры Ли[1].

▷Евклидова, эрмитова и вещественная структуры на пространстве комплексных 2×2 - матриц ▷SU_2 и кватернионы ▷Накрытия $SU_2 \twoheadrightarrow SO_3$ и $SU_2 \times SU_2 \twoheadrightarrow SO_4$ ▷Разложение $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{su}_2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ▷Группы Ли и линейные алгебраические группы ▷Алгебры Ли ▷Гомоморфизмы и представления групп и алгебр Ли ▷Унитарные, ортогональные и спинорные группы малых рангов

§1. Комплексные матрицы размера 2×2.

1.1. Инволюции. В этой лекции мы будем заниматься алгеброй M комплексных 2×2 - матриц. На пространстве M имеются три естественных инволюции. Первая $\mathbb{C}$-линейна и переводит матрицу в присоединённую:

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix} \longmapsto \eta^{\vee} = \Lambda^2 \eta^t = \begin{pmatrix} \eta_{22} & -\eta_{12} \\ -\eta_{21} & \eta_{11} \end{pmatrix}$$

Поскольку $\eta^{\vee\vee} = \eta$ и $(\eta\zeta)^{\vee} = \zeta^{\vee}\eta^{\vee}$, это *антиинволюцией алгебры* M. По формуле

$$(\eta, \zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\eta^{\vee} \zeta) \ ,$$

она индуцирует на M симметрическую $\mathbb{C}$-билинейную форму, которая является поляризацией квадратичной формы $(\eta, \eta) = \det(\eta)$. Другая инволюция $\mathbb{C}$-антилинейна и переводит матрицу η в эрмитово сопряжённую

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix} \longmapsto \eta^{h} = \overline{\eta}^t = \begin{pmatrix} \overline{\eta}_{11} & \overline{\eta}_{21} \\ \overline{\eta}_{12} & \overline{\eta}_{22} \end{pmatrix}$$

Она коммутирует с предыдущей, тоже переставляет сомножители в произведениях, и индуцирует на M *эрммитову* форму

$$(\eta, \zeta)_h \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\eta^{h} \zeta) \ ,$$

[1]Это только черновая версия, находящаяся в стадии доработки

которой отвечает норма $||\eta||^2 = (\eta,\eta)_h = \sum |\eta_{ij}|^2$. Композиция $\sigma = \vee \circ h = h \circ \vee$ этих двух инволюций действует на матрицы по правилу

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix} \longmapsto \eta^\sigma = \eta^{\vee h} = \begin{pmatrix} \overline{\eta}_{22} & -\overline{\eta}_{12} \\ -\overline{\eta}_{21} & \overline{\eta}_{11} \end{pmatrix} .$$

и является $\mathbb{C}$-антилинейной инволюцией ялгебры M. Она задаёт на векторном пространстве M *вещественную структуру*, которая однозначно характеризуется тем, то переводит предыдущие билинейную и эрмитову формы на M друг в друга: $(\eta,\zeta)_h = (\eta^\sigma,\zeta)$.

Задача 4.1. Докажите, что комплексное векторное пространство W тогда и только тогда является комплексификацией вещественного векторного пространства[2] V, когда на W имеется $\mathbb{R}$-линейный оператор σ, такой что $\sigma^2 = \mathrm{Id}_W$ и $\sigma(zw) = \overline{z}\,\sigma(w) \quad \forall\, z \in \mathbb{C},\ w \in W$.

Указание: Оператор σ – это комплексное сопряжение. Вещественное подпространство V в W восстанавливается как $\ker(\sigma - \mathrm{Id}_W)$, и надо только проверить, что над $\mathbb{R}$ имеется разложение $W = V \oplus i\,V$.

Задача 4.2. Пусть на комплексном векторном пространстве W имеется билинейная симметричная форма g и эрмитова форма h. Проверьте, что существует единственный $\mathbb{C}$-антилинейный оператор $W \xrightarrow{\sigma} \overline{W}$, удовлетворяющий условию $h(w_1,w_2) = g(\eta^\sigma,\zeta)$, и что этот оператор тогда и только тогда задаёт вещественную структуру на W, когда формы h и g одновременно приводятся к единичному виду (т. е. имеют общий ортонормальный базис).

1.2. Вещественное подпространство $\mathrm{Re}\,(M)$ относительно структуры σ состоит из всех матриц вида

$$x = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + i\,x_2 & x_3 + i\,x_4 \\ -x_3 + i\,x_4 & x_1 - i\,x_2 \end{pmatrix} , \quad z_\nu \in \mathbb{C} , \quad x_\nu \in \mathbb{R} .$$

Ограничения эрмитовой и билинейной форм на это четырёхмерное вещественное подпространство совпадают и в координатах x_i представляют собой стандартную евклидову норму $(x,x) = \sum x_\nu^2$. Ортонормальный базис евклидова пространства $\mathrm{Re}\,(M)$ состоит из матриц

$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} . \tag{1-1}$$

Задача 4.3. Составьте таблицу умножения матриц $\boldsymbol{e},\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ в M и таблицу их попарных коммутаторов.

1.3. Кватернионы. Из зад.4.3 вытекает, что матрицы $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ перемножаются по правилам

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1 , \quad \boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k} , \quad \boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i} , \quad \boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j} , \tag{1-2}$$

и значит, пространство $\mathrm{Re}\,(M)$ замкнуто относительно умножения, т. е. представляет собой четырёхмерную алгебру над полем $\mathbb{R}$ с единицей $1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \boldsymbol{e}$. Будуи подалгеброй в алгебре матриц, она ассоциативна, однако, не коммутативна. Эта алгебра называется *алгеброй кватернионов* и обозначается через $\mathbb{H}$.

[2]это означает, что имеет место изоморфизм вещественных векторных пространств $W = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V = V \oplus i\,V$

1.3.1. Норма. Поскольку определитель произведения матриц равен произведению определителей, евклидова норма $||x||^2 = \sum x_\nu^2 = \det(x)$ на $\mathbb{H}$ мультипликативна: $||xy|| = ||x||\,||y||$, что приводит к любопытному тождеству

Задача 4.4. Докажите *тождество Эйлера*[3]

$$\begin{aligned}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)\cdot(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2) = \quad & (x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4)^2 + \\ & + (x_1y_2+x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3)^2 + \\ & + (x_1y_3+x_3y_1+x_4y_2-x_2y_4)^2 + \\ & + (x_1y_4+x_4y_1+x_2y_3-x_3y_2)^2\end{aligned}$$

1.3.2. Сопряжение. Антинволюция $\vee$ оставляет на месте $\boldsymbol{e}$ и меняет знак у матриц $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, т. е. переводит кватернион $q = \boldsymbol{e}\,x_1 + \boldsymbol{i}\,x_2 + \boldsymbol{j}\,x_3 + \boldsymbol{k}\,x_4$ в кватернион

$$q^\vee = ||q||\,q^{-1} = \boldsymbol{e}\,x_1 - \boldsymbol{i}\,x_2 - \boldsymbol{j}\,x_3 - \boldsymbol{k}\,x_4 \,.$$

В таком контексте она называется *кватернионным сопряжением.*

1.3.3. Деление. В силу соотношений Лапласа $\eta\,\eta^\vee = \det(\eta)\,E$ для любой матрицы $\eta \in M$. Поэтому $q\,q^\vee = ||q||$, и следовательно, всякий ненулевой кватернион q обратим

$$q^{-1} = ||q||^{-1}\,q^\vee \,,$$

так что $\mathbb{H}$ – это некоммутативная ассоциативная *алгебра с делением*, т. е. *тело.*

1.3.4. Кватернионы с нормой 1 составляют мультипликативную подгруппу в алгебре $\mathbb{H}$. Геометрически она представляет собой единичную трёхмерную сферу $S^3 \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$. В терминах M эта группа состоит из всех матриц η, удовлетворяющих соотношениям $(\eta^h)^\vee = \eta$ (вещественность) и $\det\eta = 1$. При наличии второго, первое равносильно равенству $\eta^h = \eta^{-1}$, т. е. группа кватернионов с нормой 1 — это специальная унитарная группа

$$SU_2 = \{\,\eta \in SL_2(\mathbb{C}) \mid \eta\,\overline{\eta}^t = 1\,\} \,.$$

1.3.5. Комплексные структуры на пространсте кватернионов. Кватернионы вида $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{i}\,x_2 + \boldsymbol{j}\,x_3 + \boldsymbol{k}\,x_4$ называются *чисто мнимыми.* Чисто мнимые кватернионы нормы 1 составляют двумерную сферу в трёхмерном пространстве всех чисто мнимых кватернионов, и выделяются в $\mathbb{H}$ условиями $q^\vee = -q$ и $||q|| = 1$, которые равносильны одному уравнению $q^2 = -1$. Таким образом, оператор левого умножения на любой чисто мнимый кватернион $\boldsymbol{m}$ единичной нормы задаёт *комплексную структуру* на четырёхмерном вещественном пространстве $\mathbb{H}$,

Задача 4.5. Докажите, что $2n$-мерное вещественное векторное пространство тогда и только тогда получается овеществлением[5] n-мерного комплексного векторным пространства , когда на нём имеется вещественно линейный оператор I, удовлетворяющий условию $I^2 = -\mathrm{Id}$.

Указание: Оператор I есть оператор умножения на комплексное число i. Умножение на комплексные числа восстанавливается из него по формуле $(x+i\,y)\,w \overset{\text{def}}{=} x\,w + y\,I(w) \quad \forall\, w\in W\,,\ (x+i\,y)\in\mathbb{C}$.

[3]Эйлер использовал его в своём доказательстве того, что произведение двух чисел, представимых в виде суммы четырёх квадратов, тоже представимо в таком виде

[5]т. е. сужением поля констант с $\mathbb{C}$ до $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

относительно которой $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{\perp}$, где первое слагаемое — это вещественная линейная оболочка векторов $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{m}$, отождествлённая с *полем* $\mathbb{C}$ посредством отображения

$$\{1, i\} \longmapsto \{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{m}\} ,$$

а второе суть евклидово ортогональное дополнение к первому и является *одномерным комплексным векторным пространством*, на котором умножение на комплексные числа определяется как *левое* умножение на кватернионы из первого слагаемого $\mathbb{C}$ (оно переводят $\mathbb{C}^{\perp}$ в себя, поскольку левое умножение и на $\boldsymbol{e}$ и на $\boldsymbol{m}$ сохраняют евклидову норму, а с ней и ортогональность).

Произвольно фиксировав чисто мнимый кватернион $\boldsymbol{n}\in\mathbb{C}^{\perp}$ с $||\boldsymbol{n}|| = 1$, мы можем писать

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\,\boldsymbol{n} = \{\, z_1 + z_2\,\boldsymbol{n} \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C} = \mathbb{R}\,\boldsymbol{e} + \mathbb{R}\,\boldsymbol{m}\} \, .$$

Поскольку $\boldsymbol{mn} = -\overline{\boldsymbol{mn}} = -\overline{\boldsymbol{n}}\,\overline{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{n}\,\overline{\boldsymbol{m}}$, мы видим, что левое и правое кватернионное умножение на комплексные числа связаны соотношением $z\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}\overline{z}$. Поэтому

$$z\,q = q\,\overline{z} \, , \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}, \; q \in \mathbb{C}^{\perp} \, .$$

Иначе говоря, правое кватернионное умножение элементов из $\mathbb{C}^{\perp}$ на $z \in \mathbb{C}$ соответствует умножению векторов одномерного комплексного пространства $\mathbb{C}^{\perp}$ на сопряжённые комплексные числа $\overline{z}$ ([6]).

1.4. Накрытие $\boldsymbol{SU}_2 \longrightarrow \boldsymbol{SO}_3$. Рассмотрим действие группы $SU_2 = S^3$ кватернионов единичной нормы сопряжениями на $\mathbb{H}$:

$$q \,:\, x \longmapsto q\,x\,q^{-1} \, , \quad q \in S^3 = SU_2 \, , \quad x \in \mathbb{H} \, .$$

Поскольку такие сопряжения сохраняют евклидову норму (детерминант) и оставляют на месте единицу $\boldsymbol{e}$, они переводят в себя ортогональное дополнение к ней — трёхмерное вещественное пространство $\boldsymbol{e}^{\perp}$ чисто мнимых кватернионов. В результате возникает гомоморфизм групп $SU_2 \xrightarrow{Ad} O_3 = O(\boldsymbol{e}^{\perp})$.

Задача 4.6. Проверьте, что в координатах он задаётся формулой

$$\begin{pmatrix} x_1 + i\,x_2 & x_3 + i\,x_4 \\ -x_3 + i\,x_4 & x_1 - i\,x_2 \end{pmatrix} \overset{Ad}{\longmapsto} \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 & 2\,(x_1x_4 + x_2x_3) & 2\,(x_2x_4 - x_1x_3) \\ 2\,(x_2x_3 - x_1x_4) & x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 & 2\,(x_3x_4 + x_1x_2) \\ 2\,(x_2x_4 + x_1x_3) & 2\,(x_3x_4 - x_1x_2) & x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 \end{pmatrix} .$$

где $\sum |x_\nu|^2 = 1$.

1.4.1. Утверждение. $\operatorname{im} Ad = SO_3$ *и* $\ker Ad = \{\pm E\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Доказательство. Поскольку сопряжение кватернионом q тождественно действует на вещественной двумерной плоскости π, проходящей через 1 и q, оператор $Ad(q)$ тождественно действует на прямой, высекаемой плоскостью π в пространстве чисто мнимых кватернионов. Эта прямая пересекается со сферой чисто мнимых кватернионов единичной длины по в двух

[6] в частности, аналогично тому, как $\mathbb{C}$ получается из $\mathbb{R}$, тело кватернионов $\mathbb{H}$ можно воспринимать как результат некоммутативного двумерного расширения поля $\mathbb{C}$, т. е. как множесто символов вида $z_1 + z_2\boldsymbol{m}$, перемножаемых по правилам $(z_1 + z_2\,\boldsymbol{m})(\zeta_1 + \zeta_2\,\boldsymbol{m}) = (z_1\zeta_1 - z_2\overline{\zeta}_2) + (z_1\zeta_2 + \overline{z}_2\zeta_1)\,\boldsymbol{m}$

точках $\pm\boldsymbol{m}$. Вводя на $\mathbb{H}$ комплексную структуру $\{1, i\} \longmapsto \{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{m}\}$, мы отождествляем π с полем $\mathbb{C}$, а ортогонал $\pi^\perp$ – с одномерным комплексным пространством, на котором левое и правое умножения на кватернионы из π, интерпретируются, соответственно, как умножения векторов на комплексные числа z и $\overline{z}$, $z \in \mathbb{C} = \pi$. В частности, $Ad(q)$ действует на $\pi^\perp$ как умножение на комплексное число q^2, т. е. представляет собой поворот плоскости $\pi^\perp$ на угол $2\,Arg(q)$.

Таким образом, $\operatorname{im}(Ad)$ состоит из всевозможных поворотов вокруг прямых, т. е. совпадает с SO_3. Поскольку поороты производятся на удвоенные углы $Arg(q)$, одному повороту соответствуют ровно два кватерниона $\pm q$. □

1.5. Накрытие $\boldsymbol{SU}_2 \times \boldsymbol{SU}_2 \twoheadrightarrow \boldsymbol{SO}_4$. Обобщая предыдущие рассуждения, рассмотрим на $\mathbb{H}$ действие группы $SU_2 \times SU_2$:

$$(q_1, q_2) \,:\, x \longmapsto q_1\, x\, q_2^{-1}\,, \quad q_1, q_2 \in S^3 = SU_2\,, \quad x \in \mathbb{H}\,.$$

Это действие является гомоморфизмом из $SU_2 \times SU_2$ в группу O_4 всех евклидовых изометрий пространства $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$.

1.5.1. Утверждение. *При этом гомоморфизме $SU_2 \times SU_2$ эпиморфно накрывает SO_4 с ядром $\{\pm E\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Оператор $x \longmapsto q_1\, x\, q_2^{-1} = q_1 q_2^{-1}\, q_2 x q_2^{-1}$ является композицией левого умножения на кватернион $q_1 q_2^{-1} \in S^3$ и сопряжения кватернионом $q_2 \in S^3$.

> Задача 4.7. Убедитесь, что оператор левого умножения на кватернион единичной длины лежит в SO_4 (т. е. сохраняет ориентацию).

Второе преобразование оставляет на месте $\boldsymbol{e} \in \mathbb{H}$ и представляет собой оператор из группы $SO_3 \subset SO_4$ ортогональных преобразований пространства $\boldsymbol{e}^\perp$ чисто мнимых кватернионов. Таким образом, образ $SU_2 \times SU_2$ лежит в SO_4.

Наоборот, всякий оператор $f \in SO_4$ единственным образом представляется в виде композиции $f = \lambda_q \circ \widetilde{f}$ оператора левого умножения на кватернион $q = f(\boldsymbol{e})$ и оператора $\widetilde{f} = \lambda_q^{-1} \circ f$, оставляющего на месте $\boldsymbol{e}$, и потому лежащего в $SO_3 = SO(\boldsymbol{e}^\perp) \subset SO_4$. Согласно Утв.1.4.1, существует единственный с точностью до знака кватернион $h \in S^3$, такой что $\widetilde{f}(x) = h\, x\, h^{-1} \quad \forall\, x \in, \mathbb{H}$. Но тогда $f(x) = qh\, x\, h^{-1}$, т. е. f попадает в образ $SU_2 \times SU_2$, и его прообраз (qh, h) определён однозначно с точностью до знака. □

> Задача 4.8. Покажите, что как топологическое пространство $SO_4 = S^3 \times SO_3$.

1.6. Подалгебры Ли. Векторное подпространство в матричной алгебре называется *подалгеброй Ли*, если вместе с каждыми двумя матрицами x, y оно содержит и их коммутатор $[x, y] = xy - yx$.

> Задача 4.9. Докажите, что коммутаторы бесследны: $\operatorname{tr}([xy]) = 0 \quad \forall\, x, y$.

Множество всех бесследных маитриц размера $n \times n$ над полем k составляет подалгебру Ли, которая обозначается $\mathfrak{sl}_n(k)$. Если n не делится на характеристику основного поля k, линейный оператор

$$x \longmapsto x - \frac{1}{n}\operatorname{tr}(x)$$

проектирует все матрицы на бесследные вдоль скалярных и задаёт каноническое разложение матричной алгебры в прямую сумму одномерной коммутативной подалгебры гомотетий и подалгебры Ли $\mathfrak{sl}$.

В нашем случае имеем $M = \mathbb{C}\,\boldsymbol{e} \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, где второе слагаемое порождается над $\mathbb{C}$ матрицами $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ из (1-1). Отметим, что это разложение инвариантно относительно вещественной структуры σ. Трёхмерное вещественное пространство $\mathrm{Re}\,(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ состоит из всех матриц вида

$$x = \begin{pmatrix} i\,x_2 & x_3 + i\,x_4 \\ -x_3 + i\,x_4 & -i\,x_2 \end{pmatrix}\,, \quad x_\nu \in \mathbb{R}\,,$$

т. е. всех *косоэрмитовых матриц со следом нуль*. Оно обозначается $\mathfrak{su}_2$ и порождается над $\mathbb{R}$ всё теми же матрицами $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Согласно зад.4.3, они коммутируют по правилам

$$[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}] = 2\,\boldsymbol{k}\,, \quad [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}] = 2\,\boldsymbol{i}\,, \quad [\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}] = 2\,\boldsymbol{j}\,, \tag{1-3}$$

так что $\mathfrak{su}_2$ представляет собой трёхмерную вещественную алгебру Ли, комплексификация которой — трёхмерная комплексная алгебра Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

1.7. Изоморфизм $\Lambda^2 M \xrightarrow{(\lambda_+,\lambda_-)} \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Отображения

$$\begin{aligned} \lambda_+(\eta \wedge \zeta) &\longmapsto \zeta^\vee \eta - \eta^\vee \zeta \\ \lambda_-(\eta \wedge \zeta) &\longmapsto \zeta\,\eta^\vee - \eta\,\zeta^\vee \end{aligned} \tag{1-4}$$

действуют из $\Lambda^2 M$ в подалгебру Ли бесследных операторов $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \subset M$. Образы стандартных базисных векторов $\Lambda^2 M$, происходящих из кватернионного базиса $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, при этом суть

$$\begin{aligned} \lambda_+(\boldsymbol{e}\wedge \boldsymbol{i}) &= -\lambda_-(\boldsymbol{e}\wedge \boldsymbol{i}) = 2\,\boldsymbol{i} & \qquad -\lambda_+(\boldsymbol{i}\wedge \boldsymbol{j}) &= \lambda_-(\boldsymbol{i}\wedge \boldsymbol{j}) = 2\,\boldsymbol{k} \\ \lambda_+(\boldsymbol{e}\wedge \boldsymbol{j}) &= -\lambda_-(\boldsymbol{e}\wedge \boldsymbol{j}) = 2\,\boldsymbol{j} & \qquad -\lambda_+(\boldsymbol{j}\wedge \boldsymbol{k}) &= \lambda_-(\boldsymbol{j}\wedge \boldsymbol{k}) = 2\,\boldsymbol{i} \\ \lambda_+(\boldsymbol{e}\wedge \boldsymbol{k}) &= -\lambda_-(\boldsymbol{e}\wedge \boldsymbol{k}) = 2\,\boldsymbol{k} & \qquad -\lambda_+(\boldsymbol{k}\wedge \boldsymbol{i}) &= \lambda_-(\boldsymbol{k}\wedge \boldsymbol{i}) = 2\,\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathrm{im}\,(\lambda_+) = \mathrm{im}\,(\lambda_-) = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, тогда как $\ker(\lambda_+)$ и $\ker(\lambda_-)$ суть два дополнительных трёхмерных подпространства, порождённых, соответственно, бивекторами

$$\begin{array}{llll} \boldsymbol{e}\wedge \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}\wedge \boldsymbol{k}\,, & \boldsymbol{e}\wedge \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\wedge \boldsymbol{i}\,, & \boldsymbol{e}\wedge \boldsymbol{k} + \boldsymbol{i}\wedge \boldsymbol{j} & \in \quad \ker\lambda_+ \\ \boldsymbol{e}\wedge \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}\wedge \boldsymbol{k}\,, & \boldsymbol{e}\wedge \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}\wedge \boldsymbol{i}\,, & \boldsymbol{e}\wedge \boldsymbol{k} - \boldsymbol{i}\wedge \boldsymbol{j} & \in \quad \ker\lambda_+ \end{array}$$

Отметим, что $\lambda_\pm$ изоморфно отображает $\ker(\lambda_\mp)$ на $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, переводя написанные выше образующие в учетверённые базисные кватернионы. Таким образом, $\lambda_+ \oplus \lambda_-$ устанавливает изоморфизм

$$\Lambda^2 M \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})\;.$$

1.8. Спиноры. Рассмотрим два двумерных комплексных векторных пространства $U_\pm$ и зафиксируем *эрмитову* форму $h_\pm$ на каждом из них, а также изоморфизм $\Lambda^2 U_- \xrightarrow{\mathfrak{d}} \Lambda^2 U_+$ между их внешними степенями, согласованный с эрмитовыми структурами в том смысле, что существует бивектор $e_1^- \wedge e_2^-$, построенный по ортонормальному базису формы h_-, который переводится им в бивектор $e_1^+ \wedge e_2^+$, построенный по ортонормальному базису формы h_+. Ортонормальные базисы $\{e_1^\pm, e_2^\pm\} \subset U_\pm$ с таким свойством называются *согласованными*. Пространства $U_\pm$ вместе с набором данных $\{h_\pm, \mathfrak{d}\}$ называются пространствами $\pm$ - спиноров.

Отождествляя операторы с их матрицами в согласованных базисах, мы получаем изоморфизмы алгебры комплексных 2×2 матриц M с алгебрами $\mathrm{End}(U_-)$ и $\mathrm{End}(U_+)$, а также с векторными пространствами $W = \mathrm{Hom}(U_-, U_+)$ и $W^* = \mathrm{Hom}(U_+, U_-)$. При этом рассмотренные выше структуры на M преобретают геометрическую интерпретацию, с которой мы уже имели дело в конце третьей лекции.

Задача 4.10. Проверьте. что делённая на 2 полная свёртка между двойственными векторными пространствами $W = U_-^* \otimes U_+$ и $W^* = U_- \otimes U_+^*$ в терминах матриц означает спаривание $\langle\, \eta\,, \zeta\,\rangle = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(\eta\zeta) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(\zeta\eta)$.

Задача 4.11. Докажите, что сопоставляя оператору $U_- \xrightarrow{\eta} U_-$, $U_- \xrightarrow{\eta} U_+$ или $U_- \xrightarrow{\eta} U_+$ эрмитово сопряжённый оператор[9] $U_- \xleftarrow{\eta^h} U_-$, $U_- \xleftarrow{\eta^h} U_+$ или $U_- \xleftarrow{\eta^h} U_+$, мы в терминах матриц получим $\mathbb{C}$-антилинейную антиинволюцию h из n° 1.1, индуцирующую на M эрмитову форму $(\,*\,,\,*\,)_h$.

Задача 4.12. Докажите, что тензор $\mathfrak{d} \in \mathrm{Hom}(\Lambda^2 U_+, \Lambda^2 U_-) = \mathbb{C}\mathfrak{d}$, канонически вложенный в S^2W^* в соответствии с разложением $W^{*\otimes 2} = \mathrm{Hom}(W, W^*)$ по типам симметрии

$$\begin{aligned} W^* \otimes W^* &\cong U_+^* \otimes U_+^* \otimes U_- \otimes U_- \cong \left(S^2U_+^* \oplus \Lambda^2 U_+^*\right) \otimes \left(S^2 U_- \oplus \Lambda^2 U_-\right) \cong \\ &\cong \underbrace{\left(S^2U_+^* \otimes \Lambda^2U_-\right) \,\oplus\, \left(\Lambda^2U_+^* \otimes S^2U_-\right)}_{\Lambda^2W^*} \,\oplus\, \underbrace{\mathrm{Hom}(\Lambda^2U_+, \Lambda^2U_-) \oplus \mathrm{Hom}(S^2U_+, S^2U_-)}_{S^2W^*}\,, \end{aligned}$$

и рассматриваемый как корреляция $\mathrm{Hom}(U_-, U_+) = W \xleftrightarrow{\sim} W^* = \mathrm{Hom}(U_+, U_-)$, на языке матриц изображается $\mathbb{C}$-линейной антиинволюцией $\vee$ из n° 1.1 и индуцирует на M симметричную форму $(\,*\,,\,*\,)$.

Задача 4.13. Обозначим через $\mathrm{ad}(U_\pm) \subset \mathrm{End}(U_\pm)$ подалгебру Ли всех бесследных эндоморфизмов. Убедитесь, что имеет место канонический изоморфизм

$$\Lambda^2 W^* \xrightarrow{(\lambda_+, \lambda_-)} \mathrm{ad}(U_+) \oplus \mathrm{ad}(U_-)\,,$$

где $\Lambda^2\mathrm{Hom}(U_+, U_-) \xrightarrow{\lambda_\pm} \mathrm{ad}(U_\pm)$ заданы правилами (1-4).

Задача 4.14. Убедитесь, что подпространства $\ker \lambda_\pm \subset \Lambda^2 W^*$ совпадают с рассматривавшимися в конце прошлой лекции подпространствами $\Lambda_\pm$ автодуальных и антиавтодуальных бивекторов относительно звёздочки Ходжа, построенной по квадратичной форме $\mathfrak{d} = \det$.

1.8.1. Спинорное разложение. Пусть V — вещественное четырёхмерное евклидово пространство, и $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ — его комплексификация. $\mathbb{C}$-линейный изоморфизм

$$V_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} W = \mathrm{Hom}(U_-, U_+)$$

называется *спинорным разложением* V, если он отождествляет билинейное и эрмитово продолжения евклидова скалярного произведения с V на $V_{\mathbb{C}}$ соответстенно с поляризацией детерминанта $(\cdot,\cdot)$ и эритовой формой $(\cdot,\cdot)_h$ на W. Само вещественное пространство V при этом автоматически отождествится с вещественным подпространством в W, т. е. с кватернионами.

1.8.2. Спинорные группы. Группа $GL(U_+) \times GL(U_-)$ действует заменами координат на наборы данных $\{\,U_\pm\,,\, h_\pm\,,\, \mathfrak{d}\,\}$, задающие спинорное разложение. А именно, пара операторов (f_+, f_-) переводит согласованную пару базисов e^+ и e^- в пару базисов $f_+(e^+)$ и $f_-(e^-)$,

[9] он определяется равенством $h_?(u, \eta v) = h_?(\eta^h u, v)\ \forall\, u, v$

эрмитовы формы $h_\pm$ — в формы $f_\pm h_\pm \overline{f}^t_\pm$, а тензор $\mathfrak{d}$ – в $\det f_+ \,\mathfrak{d}\, \det f_-^{-1}$. Максимальная подгруппа в $GL(U_+)\times GL(U_-)$, сохраняющая обе эрмитовы формы $h_\pm$ и тензор $\mathfrak{d}$, называется *комплексной спинорной группой* и обозначается $Spin^{\mathbb{C}}(4)$. Она состоит из всевозможных пар унитарных матриц с одинаковым детерминантом:

$$Spin^{\mathbb{C}}(4) = \{(f_+, f_-) \in U(2)\times U(2) \mid \det f_+ = \det f_- \}\ .$$

Задача 4.15. Докажите, что $Spin^{\mathbb{C}}(4)$ есть образ эпиморфного гомоморфизма

$$SU(U_+)\times SU(U_-)\times U(1) \xrightarrow{(f_+,f_-,\vartheta)\longmapsto(\vartheta f_+,\vartheta f_-)} U(U_+)\times U(U_-)\ ,$$

ядро которого есть $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \{\pm(\mathrm{Id},\mathrm{Id},\mathrm{Id})\}$.

$Spin^{\mathbb{C}}(4)$ действует на W по правилу $(f_+,f_-)\ :\ \eta \longmapsto f_+\,\eta\, f_-^{-1}$, сохраняя билинейную и эрмитову формы, а с ними и вещественную структуру. Это действие не является свободным: пары гомотетий с одинаковым коэффициентом $\vartheta\in U(1)$ действуют тривиально, так что образ $Spin^{\mathbb{C}}(4)$ в $\mathrm{End}(W)$ совпадает с образом подгруппы $SU(U_+)\times SU(U_-)\subset Spin^{\mathbb{C}}(4)$, которая в этом контексте называется *вещественной спинорной группой* и обозначается $Spin\,(4)$. В Утв.1.5.1 мы видели, что ограничение этого действия на вещественное подпространство $\mathrm{Re}\,(W)$ даёт эпиморфизм $Spin\,(4) \twoheadrightarrow SO(\mathrm{Re}\,(W))$ с ядром $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Задача 4.16. Докажите, что имеется точная последовательность групп

$$1 \hookrightarrow U(1) \xhookrightarrow{\vartheta\longmapsto(\vartheta,\vartheta)} Spin^{\mathbb{C}}(4) \twoheadrightarrow SO_4 \twoheadrightarrow 1$$

§2. Группы и алгебры Ли.

2.1. Группы Ли Топологическая группа — это группа G, наделённая такой топологией, в которой отображения умножения $G\times G\to G$ и взятия обратного элемента $G\to G$ непрерывны. Если G — (вещественное) гладкое многообразием, а эти отображения — гладкие, то G называется *группой Ли*. Например, группы $GL_n(\mathbb{R})$ и $GL_n(\mathbb{C})$ являются группами Ли.

Задача 4.17. Докажите, что группы $PGL_n(\mathbb{R})$ и $PGL_n(\mathbb{R})$ также являются группами Ли

Если группа Ли G является комплексно аналитическим многообразием, а умножение и обращение — комплексно аналитическими отображениями, то G называется *комплексной группой Ли*. Например, $GL_n(\mathbb{C})$ и $PGL_n(\mathbb{C})$ — это комплексне группы Ли. Под *гомоморфизмами групп Ли* всегда подразумеваются гладкие (а для комплексных групп – аналитические) гомоморфизмы. Условимся через $D_g(F)$ обозначать *дифференциал* отображения F в точке g. В локальных координатах $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ в окрестности g действие дифференциала на касательный вектор состоит в умножении столбца координат вектора слева на *матрицу Якоби* $\left(\left.\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right|_g F_i\right)$, в которой F_i – это функции, задающие координаты образа отображения F в окрестности точки $F(g)$.

2.1.1. Пример. Отображение $GL_n \xrightarrow{\det} GL_1$ является гомоморфизмом групп Ли. Беря в качестве координат на GL_n матричные элементы x_{ij}, и разлагая определитель по i-той строке, находим

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\det X = \frac{\partial}{\partial x_{ij}}\left(\sum_\nu x_{i\nu}\,X_{i\nu}\right) = X_{ij}\ ,$$

где X_{ij} суть алгебраическое дополнение до (ij)-того элемента в матрице $X = (x_{ij})$. Таким образом, якобиева матрица $\left.\dfrac{\partial \det}{\partial x_{ij}}\right|_g$, представляющая собой строку длины n^2, имеет своими компонентами элементы присоединённой к g матрицы $g^\vee$, что обычно записывают[10] в виде $D_g(\det) = g^\vee$. В частности, в единице значение $D_e(\det)$ на касательном векторе с координатами $X = (x_{ij})$ равно $\sum x_{ii} = \operatorname{tr} X$.

2.2. Сдвиги и сопряжение. Условимся обозначать через $G \xrightarrow{\lambda_g} G$ отображение левого умножения на g: $h \longmapsto gh$, через $G \xrightarrow{\varrho_g} G$ — правое умножение на g^{-1}: $h \longmapsto hg^{-1}$, а через $G \xrightarrow{\sigma_g} G$ – сопряжение $\lambda_g \circ \varrho_g = \varrho_g \circ \lambda_g$: $h \longmapsto ghg^{-1}$. При любом g все три отображения являются диффеоморфизмами группы G на себя.

Задача 4.18. Убедитесь, что в группе $G = GL_n$ действие действие дифференциалов $D_h(\lambda_g)$, $D_h(\varrho_g)$ и $D_h(\sigma_g)$ на касательный вектор $X = (x_{ij}) \in T_hG$ не зависит от h и переводит X, соответственно, в $g\,X$, $X\,g^{-1}$ и $g\,X\,g^{-1}$.

Дифференцируя равенство $\lambda_g \circ \lambda_{g^{-1}} = \mathrm{Id}_G$, получаем, что $D_{g^{-1}h}(\lambda_g) \circ D_h(\lambda_{g^{-1}} = \mathrm{Id} T_hG$ есть тождественное преобразование касательного пространства T_hG для любого h. В частности линеный оператор $D_h(\lambda_g)$ всегда невырожден.

2.3. Подгруппы Ли. Подгруппа $H \subset G$ называются *подгруппой Ли*, если она является одновременно *гладким подмногообразием* в G, По определению, это означает, что у каждой точки $h \in H$ существует окрестность $U \subset G$, где $U \cap H$ описывается как множество всех решений некоторой системы из k уравнений $\{F_i(x) = 0\}$, у которой в точке h матрица Якоби $D_h(F) = \left(\left.\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right|_h F_i \right)$ невырождена в том смысле, что имеет максимальный ранг k.

Задача 4.19. Пусть G – произвольное гладкое n-мерное многообразие (необязательно группа), а $H \subset X$ – любое подмножество. Докажите, что при выполнении предыдущего условия H будет гладким $(n-k)$-мерным многообразием относительно гладкой структуры, индуцированной с G,

Указание: Для введения атласа на H надо воспользоваться (многомерной) теоремой о неявной функции.

Задача 4.20. В условиях предыдущей задачи убедитесь, что касательное пространство T_hH к подмногообразию H в точке $h \in H \subset G$ как подпространство в T_hG совпадает с ядром якобиевой матрицы: $T_hH = \ker D_h(F) \subset T_hG$.

Если G – группа Ли, а $H \subset G$ – подгруппа, то предыдущее условие достаточно проерить только в некоторой окрестности единицы $e \subset U \subset G$. Действительно, если пересечение $H \cap U$ заданётся невырожденной системой из m уравнений $f_i(g) = 0$, $i = 1, \dots, m$, то и у любой другой точки $h \in H$ есть окрестность $hU = \lambda_h(U) \subset G$, где пересечение $hU \cap H = \lambda_h(H \cap U)$ тоже задаётся системой m уравнений $\widetilde{f}_i(g) = f_i(h^{-1}g) = 0$ с якобиевой матрицей $D_h(\widetilde{f}) = D_h(f\lambda_{h^{-1}}) = D_e(f) D_h(\lambda_{h^{-1}})$ ранга m.

В этих лекциях мы будем иметь дело только с группами Ли, котороые являются подгруппами в полной линеной группе, и более того, выделяются в ней явными полиномиальными уравнениями с невырожденными якобианами.

2.3.1. Пример. Специальная линеная группа $SL_n \subset GL_n$ выделяется одним уравнением $\det X = 1$, дифференциал которого в единице невырожден согласно n° 2.1.1. Таким образом,

[10] допуская известную вольность в обращении с форматами матриц

это группа Ли (а над полем $\mathbb{C}$ — комплексная группа Ли). Отметим, что её касательное пространство в единице

$$\mathfrak{sl}_n \stackrel{\text{def}}{=} T_e SL_n = \{\, X \in Mat_n \mid D_e(\det)X = \operatorname{tr} X = 0 \,\}$$

состоит из всех матриц с нулевым следом.

2.3.2. Пример. Пусть k – произвольное коммутативное кольцо. Подмножество $G \subset Mat_n(k)$, заданное системой полиномиальных уравнений $f_i(X) = 0$, называется *линейной алгебраической группой* (над k), если для любой коммутативной k-алгебры K множество G_K решений той же самой системы уравнений $f_i(X) = 0$ в $Mat_n(K)$ будет подгруппой в $GL_n(K)$. Например, специальная линейная группа SL_n является алгебраической группой (над $\mathbb{Z}$). Другими примерами алгебраических групп (над $\mathbb{Z}$) являются *ортогональная*, *специальная ортогональная* и *симплектическая* группы

$$\begin{aligned} O_n &= \{\, g \in Mat_n \mid g\, g^t = E \,\} \\ SO_n &= \{\, g \in SL_n \mid g\, g^t = E \,\} \\ Sp_{2n} &= \{\, g \in SL_{2n} \mid g\, J\, g^t = J \,\}\ , \end{aligned}$$

где E — единичная $n \times n$ - матрица, а $J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ — симплектическая единица размера $2n \times 2n$. Подчеркнём, что эти группы можно рассматривать над любой $\mathbb{Z}$-алгеброй, т. е. над любым коммутативным кольцом K. В частности для $K = \mathbb{R}$ мы получаем группы Ли, а для $K = \mathbb{C}$ — комплексно аналитические группы.

Задача 4.21. Докажите, что якобианы $D_e(X\, X^t)$ и $D_e(X\, J\, X^t)$ невырождены.

Задача 4.22. Докажите, что касательные пространства в единице к предыдущим подгруппам состоят, соответственно, из матриц вида:

$$\begin{aligned} \mathfrak{o}_n &\stackrel{\text{def}}{=} T_e O_n = \{\, X \in Mat_n \mid X = -X^t \,\} \\ \mathfrak{so}_n &\stackrel{\text{def}}{=} T_e SO_n = \{\, X \in \mathfrak{sl}_n \mid X = -X^t \,\} \\ \mathfrak{sp}_n &\stackrel{\text{def}}{=} T_e Sp_n = \{\, X \in Mat_n \mid XJ = -JX^t \,\} \end{aligned}$$

2.3.3. Пример. *Унитарная* и *специальная унитарная* группы

$$\begin{aligned} U_n &= \{\, g \in Mat_n(\mathbb{C}) \mid g\, \overline{g}^t = E \,\} \\ SU_n &= \{\, g \in SL_n(\mathbb{C}) \mid g\, \overline{g}^t = E \,\} \end{aligned}$$

являются вещественными группами Ли.

Задача 4.23. Докажите это, и убедитесь, что их касательные пространства в единице состоят, соответственно, из косоэрмитовых матриц и косоэрмитовых матриц с нулевым следом:

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}_n &\stackrel{\text{def}}{=} T_e U_n = \{\, X \in Mat_n(\mathbb{C}) \mid X = -\overline{X}^t \,\} \\ \mathfrak{su}_n &\stackrel{\text{def}}{=} T_e SU_n = \{\, X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \mid X = -\overline{X}^t \,\} \end{aligned}$$

Подчеркнём, что эти группы *не являются* комплексно аналитическими, а уж тем более, алгебраическими (над $\mathbb{R}$).

2.4. Алгебра Ли группы Ли — это касательное пространство к этой группе в единице. Традиционно алгебра Ли обозначается маленькой готической буквой, одноимённой с большой латинской буквой, обозначающей группу: $\mathfrak{g} = T_eG$. На этом пространстве имеется каноническая структура (неассоциативной) алгебры, возникающая так. Сопряжение $G \xrightarrow{\sigma_g} G$ фиксированным элементом $g \in G$ представляет собой гладкое отображение $h \longmapsto ghg^{-1}$, которое оставляет на месте единицу $e \in G$. Его дифференциал в единице $T_eG \xrightarrow{D_e(\sigma_g)} T_eG$ является невырожденным линейным эндоморфизмом касательного пространства. Этот эндоморфизм обозначается $Ad(g)$ и называется *присоединённым действием* элемента $g \in G$ на T_eG. Поскольку дифференциал композиции равен композиции дифференциалов, отображение $g \longmapsto Ad(g)$ представляет собой *гомоморфизм групп Ли*

$$G \xrightarrow{Ad} GL(\mathfrak{g}) = GL(T_eG) \ ,$$

который называется *присоединённым представлением* группы G на своей алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Дифференциал гомоморфизма Ad в единице $e \in G$ обозначается через

$$\mathrm{ad} \ : \ \mathfrak{g} = \mathcal{T}_eG \xrightarrow{D_e(Ad} T_{\mathrm{Id}_\mathfrak{g}}GL(\mathfrak{g}) = \mathrm{End}(\mathfrak{g})$$

и сопоставляет каждому вектору $x \in \mathfrak{g}$ линейный эндоморфизм $\mathfrak{g} \xrightarrow{\mathrm{ad}(x)} \mathfrak{g}$, который и принимают за левое умножение на x в алгебре g.

2.4.1. Пример. Группа SU_2, как мы видели, представляет собой единичную сферу S^3 в вещественном четырёхмерном пространстве кватернионов $\mathbb{H}$. Её алгебра Ли $\mathfrak{su}_2 = T_eS^3$ — это трёхмерное векторное пространство $\boldsymbol{e}^\perp$ чисто мнимых кватернионов (как аффинное подпространство в H касательная плоскость к S^3 в точке $\boldsymbol{e}$ получается сдвигом векторного пространства $\boldsymbol{e}^\perp$ на вектор $\boldsymbol{e}$).

2.5. Экспоненциальное отображение. Пусть $G = GL_n$ — это полная линейная группа, так что соответствующая алгебра Ли суть пространство $\mathfrak{gl}_n = Mat_n$ всех матриц разера $n \times n$. Сопоставляя произвольной матрице $x \in \mathfrak{gl}_n$ её экспоненту:

$$\exp \ : \quad x \longmapsto e^x \stackrel{\text{def}}{=} 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \ \cdots = \sum_{\nu \geqslant 0} \frac{1}{\nu!}\,x^\nu \ ,$$

получаем гладкое отображение $\mathfrak{gl}_n \xrightarrow{\exp} GL_n$.

Задача 4.24. Докажите, что над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ написанный ряд абсолютно сходится для каждого x по любой норме на $\mathfrak{gl}_n$, и что экспоненциальное отображение обладает свойством $\exp(t_1x + t_2x) = \exp(t_1x)\exp(t_2x)$ при всех $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$ и $x \in \mathfrak{gl}_n$, но вообще говоря, *не обладает* свойством $e^(x + y) = e^xe^y$.

Задача 4.25. Докажите, что отображение $\mathbb{R}^1_+ \xrightarrow{t \longmapsto e^{tx}} GL_n$ при любом фиксированном $x \in \mathfrak{gl}_n$ является инъективным гомоморфизмом групп Ли (из аддитивной группы вещественных чисел), и что его дифференциал в нуле переводит стандартный единичный базисный касательный вектор к $\mathbb{R}_1$ в x (иначе говоря, что $\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{tx} = x$).

Задача 4.26. Докажите, что im exp содержит некоторую открытую окрестность единицы $e \in GL_n$ и является диффеоморфизмом этой окрестности с некоторой открытой окрестнотью нуля в $\mathfrak{gl}_n$.

Указание: При достаточно малой $||x||$ определён логарифм $\log(1 + x) = \sum_{\nu \geqslant 1} \frac{1}{\nu}\,x^\nu$, и $e^{\log(1+x)} = x$.

При практическом вычислении экспонент конкретных матриц, полезно иметь в виду, что $\exp(gxg^{-1}) = g\,\exp(x)\,g^{-1}$ для любой невырожденной матрицы g.

2.5.1. Пример. Поскольку любая унитарная матрица сопряжена диагональной матрице с собственными значениями вида $e^{i\varphi}$, она является экспонентой диагональной чисто мнимой, а значит, косоэрмитовой матрицы, причём если определитель исходной матрицы был 1, то соответствующая косоэрмитова матрица будет бесследной. Таким образом, ограничение экспоненциального отображения на подалгебры косоэрмитовых и специальных косоэрмитовых матриц суть эпиморфизмы

$$\mathfrak{u}_n \xrightarrow{\exp} U_n \quad , \qquad \mathfrak{su}_n \xrightarrow{\exp} SU_n$$

Вычислим умножение в алгебре Ли $\mathfrak{gl}_n$ полной линейной группы GL_n (а таким образом – и в алгебре Ли любой подгруппы Ли $G \subset GL_n$, ибо она будет подалгеброй Ли в $\mathfrak{gl}_n$). Векторное пространство $\mathfrak{gl}_n$ есть пространство всех матриц размера $n \times n$, и как мы видели в зад.4.18, присоединённое представление $GL_n \xrightarrow{Ad} GL(\mathfrak{gl}_n)$ сопоставляет невырожденной матрице $g \in GL_n$ автоморфизм сопряжения

$$Ad(g) \;:\quad x \longmapsto g\,x\,g^{-1} \qquad \forall\, x \in, \mathfrak{gl}_n \;.$$