Лекция 6
Пространства с операторами.

$\triangleright$модули над множеством операторов, их гомоморфизмы, изоморфизмы, прямые суммы, подмодули и фактор модули $\triangleright$действие групп и алгебр Ли на тензорных произведениях, двойственных пространствах и пространствах гомоморфизмов $\triangleright$приводимость, разложимость и полупростота $\triangleright$представления одного оператора $\triangleright$лемма Шура $\triangleright$свойства простых и полупростых модулей $\triangleright$$B=\mathrm{End}_A(V) \iff A=\mathrm{End}_B(V)$ $\triangleright$теорема Бернсайда $\triangleright$неприводимые $\mathfrak{sl}_2$-модули $\triangleright$полупростота $\mathfrak{sl}_2$-модулей

§1. Основные понятия, относящиеся к пространствам с операторами.

1.1. Пространство с операторами — это векторное пространство V, рассматриваемое вместе с действием на нём некоторого фиксированного множества M линейных операторов, или говоря более формально, вместе с отображением множеств $M \xrightarrow{\varrho} \mathrm{End}(V)$. В таком контексте отображение ϱ называется *линейным представлением* множества M на пространстве V, а V называется *M-модулем*. Если множество M несёт дополнительную алгебраическую структуру, например, представляет собой группу, ассоциативную алгебру или алгебру Ли, а ϱ является гомоморфизмом относительно этой структуры, то ϱ называется линейным представлением соответствующей группы, ассоциативной алгебры или алгебры Ли.

Многие математические теории приводят к необходимости классифицировать M-модули над тем или иным фиксированным множеством M с той или иной дополнительной структурой. В этой лекции мы обсудим самые общие понятия, связанные с этой задачей, и разберём несколько характерных примеров. В следующей лекции мы подробно изучим важный специальный случай — модули над конечными группами.

Теория пространств с операторами отличается от «обычной» линейной алгебры тем, что содержательный смысл в ней имеют только такие линейные операторы, подпространства, прямые суммы и т. п., которые инварианты относительно действия операторов из M.

1.2. Гомоморфизмы. Линейный оператор $U \xrightarrow{\varphi} V$ между двумя M-модулями

$$M \xrightarrow{\lambda} \mathrm{End}(U) \qquad \text{и} \qquad M \xrightarrow{\varrho} \mathrm{End}(V)$$

называется *M-гомоморфизмом* (или *гомоморфизмом M-модулей*), если он перестановочен со всеми операторами из M, т. е. если диаграмма

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\lambda(g)"'] & V \arrow[d, "\varrho(g)"] \\ U \arrow[r, "\varphi"] & V \end{tikzcd}$$

коммутативна $\forall\, g \in M$. Совокупность всех M-гомоморфизмов представляет собой векторное подпространство в пространстве всех линейных операторов $\mathrm{Hom}(U,V)$, и обозначается $\mathrm{Hom}_M(U,V)$. Два M-модуля называются *изоморфными*, если существует M-гомоморфизм $V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$, являющийся изоморфизмом векторных пространств.

1.3. Подмодули и фактор модули. Подпространство U в M-модуле V называется *инвариантным подпространством* или *подмодулем* , если все операторы из M переводят его в себя. Ограничение операторов M с V на U снабжает U канонической структурой M-модуля, относительно которой вложение $U \hookrightarrow V$ является M-гомоморфизмом.

Если U является инвариантным подпространством в M-модуле V, то все операторы из M корректно действуют на фактор пространстве V/U, наделяя его канонической структурой M-модуля, относительно которой отображение факторизации $V \twoheadrightarrow V/U$ является M-гомоморфизмом.

Задача 6.1. Докажите, что ядро и образ любого M-гомоморфизма $V \xrightarrow{\varphi} W$ являются подмодулями, и что φ канонически раскладывается в композицию эпиморфизма M-модулей $V \twoheadrightarrow V/\ker\varphi \simeq \mathrm{im}\,\varphi$ и вложения M-модулей $V/\ker\varphi \simeq \mathrm{im}\,\varphi \hookrightarrow W$.

1.4. Прямые суммы. Для любых M-модулей U, V прямая сумма векторных пространств $U \oplus V$ канонически наделяется структурой M-модуля называемого *прямой суммой* исходных модулей. Действие операторов из M определяется по стандартным правилам

$$g(u,v) = (gu, gv) \qquad \forall\, g\in G \ , \quad \forall\, u\in U,\, v\in V \ .$$

Относительно этой структуры вложения слагаемых и проекции на них:

$$U \hookrightarrow U \oplus V \hookleftarrow V \qquad\qquad U \twoheadleftarrow U \oplus V \twoheadrightarrow V$$

являются M-гомоморфизмами.

Задача 6.2. Пусть M-модуль W разложен в прямую сумму векторных подпространств $W = U \oplus V$, причём подпространство U является подмодулем. Докажите, что V тогда и только тогда являются подмодулем, когда проектор W на U вдоль V является M-гомоморфизмом.

1.5. Двойственные модули и тензорные произведения. Если U и V — два M-модуля, то на тензорном произведении векторных пространств $U \otimes V$ и на двойственных пространствах U^*, V^* можно различными способами задавать структуру M-модуля, и выбор того или иного способа обычно диктуется нуждами конкретной теории, из которой происходят рассматриваемые пространства с операторами. В дальнейшем нам понадобятся два примера, в которых M — это группа G или алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G.

1.5.1. Представление группы на $U \otimes V$ определяется формулой

$$g\,(u \otimes v) = g\,u \otimes g\,v \qquad \forall\, g\in G \ , \quad \forall\, u\in U,\, v\in V \ ,$$

т. е. так, чтобы операторы из G были *мультипликативными гомоморфизмами* тензорной алгебры (переводили тензорные произведения векторов в тензорные произведения векторов). Действие G на U^* определяется правилом

$$g\,:\,\xi\longmapsto g^{*-1}\xi\,,$$

т. е. матрицы, задающие действие G в двойственном базисе пространства U^*, транспонированы и обратны к матрицам, задающим действие G на U.

Задача 6.3. Проверьте, что это правило действительно задаёт *гомоморфизм* из группы G в $GL(U^*)$, а также что оно эквивалентно требованию, чтобы свёртка векторов с ковекторами была G-инвариантна в том смысле, что

$$\big\langle\,g(\xi)\,,\,g(v)\,\big\rangle=\big\langle\,\xi\,,\,v\,\big\rangle\qquad\forall\,g\in G\quad,\quad\forall\,u\in U\quad,\quad\forall\,\xi\in U^*\quad.$$

Задача 6.4. Убедитесь, что в определённом по предыдущими правилам представлении группы G на пространстве $\operatorname{Hom}(U,V)=U^*\otimes V$ элемент g переводит оператор φ в оператор $g\varphi g^{-1}$. В частности операторы, *неподвижные* относительно этого действия составляют подпространство $\operatorname{Hom}_G(U,V)$.

1.5.2. Представления алгебры Ли на U^* и $U\otimes V$ задаются дифференциалами описанных выше представлений соответствующей группы Ли. Элемент $x\in\mathfrak g=T_eG$ действует на тензорном произведении по правилу

$$x(u\otimes v)=\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\left(e^{tx}u\otimes e^{tx}v\right)=\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}e^{tx}u\right)\otimes v+u\otimes\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}e^{tx}v\right)=(xu)\otimes v+u\otimes(xv)\,,$$

а на двойственном пространстве — по правилу

$$x(\xi)=\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}e^{-tx^*}\xi=-x^*\xi$$

Задача 6.5. Проверьте, что эти правила действительно задают *гомоморфизмы* алгебр Ли $\mathfrak g\longrightarrow\operatorname{End}(U\otimes V)$ и $\mathfrak g\longrightarrow\operatorname{End}(U^*)$.

Задача 6.6. Докажите, что в определённом по предыдущими правилам представлении алгебры Ли $\mathfrak g$ на пространстве $\operatorname{Hom}(U,V)=U^*\otimes V$ элемент x переводит оператор φ в оператор $x\varphi-\varphi x$. В частности операторы, *аннулируемые* этим этим действием составляют подпространство $\operatorname{Hom}_{\mathfrak g}(U,V)$.

1.6. Неприводимость. M-модуль W называется *неприводимым* или *простым*, если он не имеет нетривиальных[1] подмодулей. Поскольку пересечение подмодулей, очевидно, тоже является подмодулем, любые два неприводимых подмодуля в данном модуле либо совпадают либо пересекаются по нулю.

Задача 6.7. Докажите, что всякий ненулевой гомоморфизм между двумя неприводимыми модулями является изоморфизмом.

1.6.1. Лемма Шура. *Если V простой M-модуль над алгебраически замкнутым полем k, то $\operatorname{End}_M(V)\simeq k\,\mathrm{Id}_M$, т. е. M-эндоморфизмы исчерпываются гомотетиями.*

[1] т. е. отличных от 0 и самого W

Доказательство. Действительно, над алгебраически замкнутым полем всякий эндоморфизм $V \xrightarrow{\varphi} V$ обладает собственным вектором, т. е. $\ker(\varphi - \mu\,\mathrm{Id}_V) \neq 0$ для некоторого $\mu \in k$. Но если $\varphi \in \mathrm{End}_M(V)$, то и $\varphi - \mu\,\mathrm{Id}_V \in \mathrm{End}_M(V)$, и стало быть, подмодуль $\ker(\varphi - \mu\,\mathrm{Id}_V) = V$ из-за простоты V, т. е. $\varphi = \mu\,\mathrm{Id}_V$. □

Задача 6.8. Докажите, что пространство M-гомоморфизмов между двумя неприводимыми M-модулями над алгебраически замкнутым полем либо нулевое, либо одномерное.

1.7. Разложимость. Модуль называется *разложимым*, если он представим в виде прямой суммы своих собственных подмодулей. Всякий M-модуль является прямой суммой неразложимых. Модуль называется *вполне приводимым* или *полупростым*, если он является прямой суммой неприводимых (т. е. простых) модулей. Неприводимые модули неразложимы. Обратное неверно, и неразложимые модули могут быть приводимы.

Вообще, как показывает лемма Шура, простые M-модули являются аналогами одномерных векторных пространств, и их, как правило, можно явно перечислить. Полная классификация заданного типа пространств с операторами (буде она имеется) обычно строится по такой схеме: перечисляются все неприводимые M-модули и указывается, как из них «собираются» неразложимые модули; произвольный модуль есть прямая сумма неразложимых. Мы проиллюстрируем эту схему на примере, известном из прошлого семестра.

1.8. Пример: представление одного эндоморфизма. Если множество $M = \{\varphi\}$ состоит из одного элемента, то классификация M-модулей представляет собой классификацию линейных операторов, которая обсуждалась в прошлом семестре. Над алгебраически замкнутым полем k любой оператор имеет собственный вектор, так что в этом случае неприводимые модули — это одномерные пространства и только они, а полупростота означает диагонализуемость оператора φ.

Задача 6.9. Приведите пример неразложимого приводимого (и стало быть, неполупростого) пространства с одним оператором.

Задача 6.10. Докажите, что над алгебраически замкнутым полем k всякое неразложимое пространство с одним оператором изоморфно пространству, на котором оператор в подходящем базисе задаётся матрицей

$$\begin{pmatrix} \mu & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \mu \end{pmatrix}, \qquad \mu \in k$$

Над произвольным полем k теория конечномерных пространств с одним оператором тождественна теории конечномерных $k[t]$-модулей, поскольку задание оператора $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ равносильно заданию гомоморфизма k-алгебр $k[t] \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} \mathrm{End}(V)$, переводящего t в φ, и при этом инвариантность, разложимость и приводимость относительно φ и относительно $k[t]$ будут означать одно и то же. Всякий гомоморфизм бесконечномерной алгебры $k[t]$ в конечномерную алгебру $\mathrm{End}(V)$ обладает ненулевым ядром, которое, поскольку $k[t]$ является областью главных идеалов, имеет вид $\ker\widetilde{\varphi} = (f)$, где $f \in k[t]$ есть многочлен наименьшей степени со старшим коэффициентом 1, аннулирующий оператор φ. Такой многочлен называется *минимальным многочленом* оператора φ.

Задача 6.11. Пусть оператор φ на пространстве V аннулируется многочленом $f \in k[t]$, который раскладывается в $k[t]$ в произведение s попарно взаимно простых множителей

$$f(t) = q_1(t) \cdot q_2(t) \cdot \cdots \cdot q_s(t) \ .$$

Для каждого $j = 1, 2, \dots, s$ обозначим через $f_j(t) = f(t)/q_j(t)$ соответствующее произведение $(s-1)$ из них. Докажите, что V разлагается в прямую сумму φ-инвариантных подпространств $\ker q_j(\varphi) = \operatorname{im} f_j(\varphi)$ (некоторые из которых могут оказаться нулевыми).
Указание: Из равенства $0 = f(\varphi)V = q_j(\varphi)f_j(\varphi)V$ вытекает, что

$$\operatorname{im} f_j(\varphi) \subset \ker q_j(\varphi) \qquad \forall j \ .$$

Из взаимной простоты q_i и q_j вытекает, во-первых, что $1 = x(t)\,q_i(t) + y(t)\,q_j(t)$ для подходящих $x(t), y(t) \in k[t]$, так что подставив вместо t оператор φ и применив к $v \in \ker q_i(\varphi) \cap \ker q_j(\varphi)$, получим

$$q_i(\varphi) \cap \ker q_j(\varphi) = 0 \ ,$$

а во-вторых, что наибольший общий делитель всех f_j равен 1 и $1 = \sum\limits_{\nu=1}^{s} f_\nu(t) g_\nu(t)$ для подходящих $g_\nu(t) \in k[t]$, так что подставив вместо t оператор φ и применив к произвольному $v \in V$, получим

$$V \subset \bigoplus_\nu \operatorname{im} f_\nu(\varphi) \ .$$

Из этой задачи следует, что над алгебраически замкнутым полем k, где минимальный многочлен f_φ оператора φ раскладывается в произведение линейных множителей $f_\varphi(t) = \prod\limits_\lambda (t-\lambda)^{m_\lambda}$ пространство V как φ-модуль распадается в прямую сумму подпространств $W_\lambda = \ker(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_v)$, называемых *корневыми подпространствами.*

Задача 6.12. Докажите, что если на пространстве V задан оператор π, удовлетворяющий уравнению $\pi^2 = \pi$, то $V = \ker \pi \oplus \operatorname{im} \pi$, и π суть проектор V на $\operatorname{im} \pi$ вдоль $\ker \pi$.

Задача 6.13. Докажите, что оператор φ диагонализуем над полем k тогда и только тогда, когда он аннулируется многочленом, полностью разлагающимся в $k[t]$ на попарно разные линейные множители.

Задача 6.14. Докажите, что над произвольным полем k всякое неприводимое пространство с одним оператором изоморфно пространству $k[t]/(p)$, а всякое неразложимое — пространству $k[t]/(p^n)$, где $p \in k[t]$ – неприводимый многочлен, а действие оператора состоит в умножении на t.
Указание: См. лекцию про метод Гаусса над кольцом многочленов (первый семестр) или про жорданову нормальную форму (второй семестр).

1.9. Пример: представления коммутирующих операторов. Если множество $M \subset \operatorname{End}(V)$ состоит из попарно коммутирующих операторов, то $\forall \varphi \in M$ все операторы из M являются φ-гомоморфизмами пространства V как пространства с одним оператором φ и переводят в себя каждое собственное и корневое подпространство оператора φ:

$$(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)^n v = 0 \ \Rightarrow \ (\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)^n \psi v = \psi\, (\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)^n v = 0 \ ,$$

т. е. $\psi\,(\ker(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)^n) \subset \ker(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \ , \ \forall \psi \in M$. Отсюда сразу следуют следующие факты.

1.9.1. Утверждение. *Любое множество попарно перестановочных операторов над алгебраически замкнутым полем имеет общий собственный вектор.*

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Это так при $\dim V = 1$ или если все операторы — гомотетии. Если же хоть один из операторов φ не является гомотетией, то он имеет нетривиальное собственное подпространство $0 \neq V_\lambda = \{v \in V \mid \varphi v = \lambda v\} \neq V$, которое переводится в себя всеми остальными операторами, так что к нему применимо индуктивное предположение. $\square$

1.9.2. Следствие. *Над алгебраически замкнутым полем всякий неприводимый модуль над любым множеством коммутирующих операторов одномерен.* $\square$

> Задача 6.15. Докажите, что любое множество попарно перестановочных диагонализуемых операторов может быть приведено к диагональному виду одновременно в одном базисе.

1.9.3. Следствие. *Всякое представление конечной абелевой группы над алгебраически замкнутым полем является прямой суммой одномерных.*

Доказательство. Все операторы из конечной абелевой группы G аннулируются многочленом $t^{|G|} - 1 = 0$ без кратных корней, и стало быть, диагонализуемы. $\square$

§2. Свойства полупростых модулей.

2.1. Лемма. *Следующие условия на конечномерный*[2] *M-модуль W равносильны:*

(1) *W полупрост;*

(2) *W линейно порождается простыми подмодулями;*

(3) *для всякого подмодуля $U \subset W$ существует дополнительный подмодуль $V \subset M$, такой что $W = U \oplus V$;*

(4) *для всякого подмодуля $U \subset W$ существует гомоморфизм модулей $W \xrightarrow{\pi} U$, ограничение которого на U тождественно*[3]*: $\pi|_U = \mathrm{Id}_U$.*

Доказательство. Если W линейно порождается набором простых подмодулей V_α, то для любого подмодуля $U \subset W$ можно выбрать из числа V_α такие подмодули $V_1, V_2, \dots, V_m$, что $W = U \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$. А именно, в качестве V_1 берём произвольный неприводимый модуль, не содержащийся в U. Пересечение $V_1 \cap U$, будучи подмодулем в V_1, является нулевым, так что сумма U и V_1 — прямая. Затем выбираем неприводимый модуль $V_2 \not\subset U \oplus V_1$. Пересечение $V_2 \cap (U \oplus V_1)$, будучи подмодулем в V_2, снова является нулевым, так что сумма U, V_1 и V_2 тоже прямая, и т. д. пока создаваемая прямая сумма не исчерпает всё пространство W. Таким образом, из второго условия вытекают как третье, так и (при $U = 0$) первое условия.

Наоборот, первое условие включает в себя второе, а при выполнении третьего условия модуль W очевидным образом раскладывается в прямую сумму неприводимых подмодулей. Наконец, четвёртое условие равносильно третьему по зад.6.2. $\square$

2.1.1. Следствие. *Прямые суммы, подмодули и фактор модули полупростых модулей также являются полупростыми модулями.*

---

[2] требование конечномерности не является существенным, и преодолевается стандартными теоретико-множественными ухищрениями типа леммы Цорна или трансфинитной индукции (основанной на аксиоме выбора и теореме Цермело)

[3] линейный оператор $\pi \in \mathrm{End}(V)$, для которого $\operatorname{im}\pi = U$ и $\pi|_U = \mathrm{Id}_U$ называется *проектором* пространства V на подпространство U

Доказательство. Прямая сумма полупростых модулей линейно порождается простыми подмодулями слагаемых. Каждое инвариантное подпространство в подмодуле полупростого модуля является образом M-инвариантного проектора. Фактор модуль полупростого модуля линейно порождается образами неприводимых подмодулей исходного модуля, а образ неприводимого модуля либо нулевой, либо изоморфен ему самому (и тем самым, тоже неприводим). $\square$

Задача 6.16. В теории пространств с одним оператором приведите пример, в котором подмодуль $U \subset V$ и фактор модуль V/U просты, но V не полупрост.

2.2. Ассоциативные алгебры, связанные с множеством операторов. Со всяким множеством операторов $M \subset \mathrm{End}(V)$ можно связать наименьшую ассоциативную подалгебру с единицей $A_M \subset \mathrm{End}(V)$, содержащую M. Мы будем называть её *ассоциативной оболочкой* множества $M \subset \mathrm{End}(V)$. Она может быть определена как пересечение всех подалгебр в $\mathrm{End}(V)$, содержащих M и Id_V, или как линейная оболочка всевозможных произведений операторов из M и гомотетий. Если M — группа, то A_M — это просто линейная оболочка операторов из M. Инвариантность, разложимость и приводимость относительно M и относительно A_M означают, одно и то же, так что свойства V как M-модуля тождественны свойствам V как A_M-модуля.

Другая ассоциативная подалгебра, связанная с множеством M операторов на пространстве V, — это алгебра M-гомоморфизмов $B = \mathrm{End}_M(V) = \mathrm{End}_{A_M}(V)$. Если теперь рассмотреть пространство V как B-модуль и образовать ещё одну алгебру $\mathrm{End}_B(V)$, мы обнаружим замечательную двойственность.

2.3. Теорема. *Если пространство V полупросто как модуль над ассоциативной подалгеброй $A \subset \mathrm{End}(V)$, и $B = \mathrm{End}_A(V)$, то $A = \mathrm{End}_B(V)$.*

Доказательство. Поскольку все операторы из B по определению перестановочны с операторами из A, имеется тавтологическое включение $A \subset \mathrm{End}_B(V)$. Чтобы доказать обратное включение рассмотрим произвольный базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ пространства V и покажем, что для любого оператора $\varphi \in \mathrm{End}_B(V)$ существует такой оператор $a \in A$, что $\varphi e_i = a e_i$ при всех i. Для этого рассмотрим полупростой A-модуль $W = \underbrace{V \oplus V \oplus \cdots \oplus V}_{n}$, на котором A действует по правилу

$$a\,(v_1, v_2, \dots, v_n) = (av_1, av_2, \dots, av_n)\,,$$

и определим на нём оператор $W \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} W$ по формуле

$$\widetilde{\varphi}\ :\quad (v_1, v_2, \dots, v_n) \longmapsto (\varphi v_1, \varphi v_2, \dots, \varphi v_n)\,.$$

Нам надо доказать, что $\widetilde{\varphi} e \in A\,e$, где $e = (e_1, e_2, \dots, e_n) \in W$. Поскольку W полупрост, существует проектор $\pi \in \mathrm{End}_A(W)$ модуля W на A-подмодуль $A\,e$. Если бы π был перестановочен с оператором $\widetilde{\varphi}$, мы бы имели $\widetilde{\varphi}(e) = \widetilde{\varphi}(\pi e) = \pi(\widetilde{\varphi} e) \in A\,e$, что и требуется. Таким образом, для завершения доказательства остаётся проверить равенство $\pi\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}\pi$.

Действие любого эндоморфизма $W \xrightarrow{F} W$ можно описывать матрицей (F_{ij}) с элементами $F_{ij} \in \mathrm{End}(V)$, так что

$$F\,(v_1, v_2, \dots, v_n) = \left(\sum_\nu F_{1\nu} v_\nu\,,\ \sum_\nu F_{2\nu} v_\nu\,,\ \dots\ ,\ \sum_\nu F_{n\nu} v_\nu \right)\ ,$$

Подставляя в равенство $\pi a(w) = a\pi(w)$ вектор w, у которого j-тая координата равна $v \in V$, а остальные координаты нулевые, мы получим, что матричные элементы проектора π удовлетворяют соотношениям

$$(\,\pi_{1j} a\, v\,,\ \pi_{2j} a\, v\,,\ \dots\ ,\ \pi_{nj} a\, v\,) = (\,a\, \pi_{1j} v\,,\ a\, \pi_{2j} v\,,\ \dots\ ,\ a\, \pi_{nj} v\,)$$

при любом $1 \leqslant j \leqslant n$ и любом $v \in V$. Это означает, что все матричные элементы (π_{ij}) перестановочны с A, т. е. лежат в $B = \mathrm{End}_A(V)$, и тем самым, π перестановочен с любым оператора вида $(v_1, v_2, \dots, v_n) \longmapsto (\varphi v_1, \varphi v_2, \dots, \varphi v_n)$ с $\varphi \in \mathrm{End}_B(V)$, что и утверждалось. □

Задача 6.17. Пусть V — векторное пространство. Докажите, что имеет место изоморфизм алгебр $\mathrm{End}\left(V^{\oplus n}\right) \simeq Mat_n\left(\mathrm{End}(V)\right)$.

2.4. Теорема Бернсайда. *Если V — неприводимое пространство с операторами над алгебраически замкнутым полем, то линейная оболочка всевозможных композиций этих операторов совпадает со всей алгеброй эндоморфизмов* $\mathrm{End}(V)$.

Доказательство. Поскольку V неприводимо как модуль над ассоциативной оболочкой $A_M \subset \mathrm{End}(V)$ множества операторов M, по лемме Шура имеем $B = \mathrm{End}_A(V) = k$, откуда по предыдущей теореме $A = \mathrm{End}_B(V) = \mathrm{End}(V)$. □

§3. $\mathfrak{sl}_2$ - модули.

Всюду в этом параграфе предполагается, что $\mathrm{char}\, k = 0$.

3.1. Обозначения и терминология. Напомню, что алгебра Ли $\mathfrak{sl}_2(k) \subset Mat_2(k)$ состоит из всех 2×2 - матриц с нулевым следом и представляет собой трёхмерное векторное пространство. В качестве базиса в $\mathfrak{sl}_2(k)$ мы в этом параграфе будем использовать матрицы

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

которые коммутируют по правилам:

$$[X,Y] = H \quad , \qquad [H,X] = 2\,X \quad , \qquad [H,Y] = -2\,Y \tag{3-1}$$

Структура $\mathfrak{sl}_2(k)$-модуля на пространстве V задаётся *гомоморфизмом алгебр Ли*[4]

$$\mathfrak{sl}_2(k) \xrightarrow{\ \varrho\ } \mathrm{End}(V)\,.$$

или, что равносильно, тремя операторами X, Y, $Z \subset \mathrm{End}(V)$, удовлетворяющими коммутационным соотношениям (3-1).

3.2. Стандартные $\mathfrak{sl}_2$-модули. Простейшими $\mathfrak{sl}_2$-модулями являются *тривиальный* одномерный модуль $\mathcal{V}_0 \simeq k$, на котором все три оператора действуют умножением на нуль, и *тавтологический* двумерный модуль $\mathcal{V}_1 = k^2$ на котором $\mathfrak{sl}_2 \subset Mat_2(k)$ действует левыми умножениями:

$$X\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad Y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x \end{pmatrix} \quad , \qquad H\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

[4] т. е. линейным оператором, который переводит коммутаторы в коммутаторы

Эти два модуля являются первыми членами из серии представлений алгебры $\mathfrak{sl}_2$ на пространствах однородных бинарных форм, с которыми мы уже встречались в лекции 5. А именно, дифференциальные операторы

$$X \longmapsto x\,\frac{\partial}{\partial y} \quad , \qquad Y \longmapsto y\,\frac{\partial}{\partial x} \quad , \qquad H \longmapsto x\,\frac{\partial}{\partial x} - y\,\frac{\partial}{\partial y}\,,$$

задают действие алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ на пространстве многочленов $k[x,y]$.

Задача 6.18. Убедитесь прямым вычислением, что эти дифференциальные операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям (3-1).

Поскольку все три оператора сохраняют степень каждого монома, $k[x,y]$ является прямой суммой конечномерных $\mathfrak{sl}_2$-модулей $\mathcal{V}_n \simeq S^n\mathcal{V}_1$, состоящих из однородных форм n-той степени, так что $\dim \mathcal{V}_n = (n+1)$. Модули $\mathcal{V}_n$ называются *стандартными*. В мономиальном базисе $\{\, e_p = x^p y^{n-p}\,\}$ действие операторов X, Y, H задаётся формулами

$$\begin{aligned} X:\ e_p &\longmapsto (n-p)\,e_{p+1}\\ Y:\ e_p &\longmapsto p\,e_{p-1}\\ H:\ e_p &\longmapsto (2\,p-n)\,e_p \end{aligned} \tag{3-2}$$

3.2.1. Утверждение. *Все стандартные $\mathfrak{sl}_2$-модули $\mathcal{V}_n$ неприводимы.*

Доказательство. Разложим произвольный вектор $v\in\mathcal{V}_n$ по стандартному базису из (3-2), и пусть e_s – это последний базисный вектор (с наибольшим s) реально присутствующий в этом разложении. Тогда X^mY^kv будет пропорционален (с ненулевым коэффициентом) базисному вектору e_m при всех $0\leqslant m\leqslant n$, и стало быть, $\mathfrak{sl}_2$-орбита произвольного вектора v порождает всё пространство $\mathcal{V}_n$ □

3.3. Описание неприводимых $\mathfrak{sl}_2$-модулей. Пусть V — неприводимый $\mathfrak{sl}_2$-модуль. Чтобы прояснить его строение, мы рассмотрим пространство V над алгебраическим замыканием основного поля и разложим его в прямую сумму $V = \oplus W_\lambda$ корневых подпространств W_λ оператора H, отвечающих всем его попарно разным собственным значениям λ. Напомню, что $W_\lambda\subset V$ инвариантно выделяются как ядра $\ker(H-\lambda\,E)^n$, где n достаточно велико.

3.3.1. Лемма. *Оператор X переводит собственное и корневое подпространства оператора H, отвечающие собственному значению λ, в его собственное и корневое подпространства, отвечающие собственному значению $\lambda+2$.*

Доказательство. Пользуясь коммутационным соотношением $[H,X] = HX - XH = 2\,X$ находим:

$$X(H-\lambda\,E) = XH - \lambda\,X = H - 2\,X - \lambda\,X = (H-(\lambda+2)\,E)X\ ,$$

откуда $X(H-\lambda\,E)^n = (H-(\lambda+2)\,E)^nX$ при любом $n\geqslant 1$. Таким образом, из $(H-\lambda\,E)^nv=0$ вытекает, что $(H-(\lambda+2)\,E)^nXv = X(H-\lambda\,E)^nv = 0$. □

Задача 6.19. Докажите, что оператор Y переводит собственное и корневое подпространства оператора H, отвечающие собственному значению λ, в его собственное и корневое подпространства, отвечающие собственному значению $\lambda-2$.

3.3.2. Примитивные векторы и веса. Собственные значения оператора H на неприводимом модуле V называются *весами*, а собственные векторы — *весовыми векторами*. Весовые векторы, попадающие в ядро оператора X называются *примитивными*. Любой неприводимый $\mathfrak{sl}_2$-модуль обладает примитивным вектором (над алгебраически замкнутым полем). Чтобы его построить, надо взять произвольный весовой вектор, и применять к нему оператор X. Векторы, которые при этом будут получаться, тоже будут весовыми со всё большими весами, что не может продолжаться бесконечно, ибо у H лишь конечное число собственных значений. Последний ненулевой весовой вектор в этой цепочке и будет примитивным.

3.3.3. Лемма. *$\mathfrak{sl}_2$-орбита примитивного вектора изоморфна стандартному модулю $\mathcal{V}_n$ с подходящим n.*

Доказательство. Пусть $v \in V$ примитивный вектор веса λ, так что $Hv = \lambda v$ и $Xv = 0$. Согласно зад.6.19 все векторы в цепочке v, Yv, Y^2v, ... являются собственными для H с собственными значениями λ, $(\lambda-2)$, $(\lambda-4)$, ..., так что при каком-то m будем иметь $Y^{m-1}v \neq 0$, а $Y^m v = 0$. Обозначим последний ненулевой вектор $Y^{m-1}v$ через v_0, а предшествующие ему через v_1, v_2, так чтобы цепочка приобрела вид

$$0 \xleftarrow{Y} v_0 \xleftarrow{Y} v_1 \xleftarrow{Y} v_2 \xleftarrow{Y} \ \dots \ \xleftarrow{Y} v_{m-1} \xleftarrow{Y} v_m \xrightarrow{X} 0$$

Оператор H действует на векторы цепочки по формуле $Hv_i = (\lambda - 2\,(m-i))\,v_i$, а зная действие Y и H, мы с помощью соотношения $XY = YX + H$ можем вычислить действие на эту цепочку и третьего оператора X:

$$\begin{aligned}
X\,v_m &= X\,v = 0\\
X\,v_{m-1} &= XY\,v_m = YX\,v_m + H\,v_m = \lambda\,v_m\\
X\,v_{m-2} &= XY\,v_{m-1} = YX\,v_{m-1} + H\,v_{m-1} = (\lambda + (\lambda-2))\,v_{m-1}\\
X\,v_{m-3} &= XY\,v_{m-2} = YX\,v_{m-2} + H\,v_{m-2} = (\lambda + (\lambda-2) + (\lambda-4))\,v_{m-2}\\
\dots & \qquad\qquad \dots\\
X\,v_{m-i} &= XY\,v_{m-i+1} = YX\,v_{m-i+1} + H\,v_{m-i+1} =\\
&\qquad = (\lambda + (\lambda-2) + \ \cdots\ + (\lambda - 2\,(i-1)))\,v_{m-i+1} = i\,(\lambda - i + 1)\,v_{m-i+1}\\
\dots & \qquad\qquad \dots\\
X\,v_0 &= m\,(\lambda - m + 1)\,v_1
\end{aligned}$$

Делая ещё один такой же шаг, мы вычислим $X(0) = XY\,v_0 = 0$. Это приводит к соотношению:

$$0 = XY\,v_0 = YX\,v_0 + H\,v_0 = (m\,(\lambda - m + 1) + (\lambda - 2\,m))\,v_0 = (m+1)(\lambda - m)\,v_0\ ,$$

что возможно только при $m = \lambda$. Таким образом, все собственные значения оператора H целые[5], а линейная оболочка векторов v_i представляет собой $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль, в котором действие операторов X, Y, H на базис v_i задаётся формулами:

$$\begin{aligned}
X &: \ v_p \longmapsto (m-p)(p+1)\,e_{p+1}\\
Y &: \ v_p \longmapsto v_{p-1}\\
H &: \ v_p \longmapsto (2\,p - n)\,v_p
\end{aligned} .$$

[5]и в частности, корневое разложение пространства V по действию оператора H возможно над любым полем!

Отображение $v_p \longmapsto \dfrac{1}{p!}\, e_p = \dfrac{1}{p!}\, x^p y^{n-p}$ устанавливает изоморфизм этого модуля со стандартным модулем $\mathcal{V}_m$. $\square$

3.3.4. Следствие. *Все неприводимые $\mathfrak{sl}_2$-модули исчерпываются стандартными модулями $\mathcal{V}_n$.* $\square$

Задача 6.20. Докажите, что в произвольном $\mathfrak{sl}_2$-модуле оператор H диагонализуем и имеет целые собственные значения, а операторы X и Y нильпотентны.

3.4. Полная приводимость $\mathfrak{sl}_2$-модулей. В этом пункте мы докажем, что всякий конечномерный $\mathfrak{sl}_2$-модуль полупрост. Главным инструментом доказательства будет линейный оператор K, который лежит в *ассоциативной алгебре*, порождённой операторами X, Y, Z, и коммутирует с ними. По лемме Шура такой оператор действует на каждом неприводимом модуле как гомотетия, что и позволит нам построить $\mathfrak{sl}_2$-инвариантный проектор на любой неприводимый подмодуль.

3.4.1. Оператор Казимира. Алгебра $\mathfrak{sl}_2$ естественно вложена как подалгебра Ли в ассоциативную алгебру $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$. Каждому элементу $x \in \mathfrak{sl}_2$ при этом соответствует эндоморфизм $\mathrm{ad}_x : y \longmapsto [x, y]$.

Задача 6.21. Проверьте, что $\mathrm{ad}_{[x,y]} = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y]$ в $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$ для любых $x, y \in \mathfrak{sl}_2$, и что $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$ является $\mathfrak{sl}_2$-модулем относительно действия $x : \varphi \longmapsto [\mathrm{ad}_x, \varphi]$.

На ассоциативной алгебре $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$ имеется каноническая симметричная билинейная *форма следа* $(\varphi, \psi) = \mathrm{tr}\,(\varphi\psi)$, ограничение которой на образ $\mathfrak{sl}_2 \subset \mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$ невырожденно.

Задача 6.22. Проверьте, что матрица Грама формы $(x, y) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y)$ в базисе $\{X, Y, H\}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Двойственным к базису $\{X, Y, H\}$ относительно формы следа является, таким образом, базис

$$\{\, X^* = \frac{1}{4} Y \,,\ Y^* = \frac{1}{4} X \,,\ H^* = \frac{1}{8} X \,\} \,.$$

Наличие скалярного произведения на $\mathfrak{sl}_2$ позволяет отождествить $\mathfrak{sl}_2$ с $\mathfrak{sl}_2^*$, а алгебру эндоморфизмов $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2) \simeq \mathfrak{sl}_2^* \otimes \mathfrak{sl}_2$ с тензорным квадратом $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathfrak{sl}_2$. При таком отождествлении тождественный эндоморфизм пространства $\mathfrak{sl}_2$ изобразится *тензором Казимира*

$$\varkappa = X \otimes X^* + Y \otimes Y^* + H \otimes H^* = \frac{1}{4}\, (X \otimes Y + Y \otimes X) + \frac{1}{8}\, H \otimes H \,.$$

Всякое представление $\mathfrak{sl}_2 \xrightarrow{\varrho} \mathrm{End}(V)$ индуцирует линейное отображение

$$\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2) \simeq \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathfrak{sl}_2 \xrightarrow{\widetilde{\varrho}} \mathrm{End}(V) \,,$$

действующее на разложимые тензоры по правилу $\widetilde{\varrho}(A \otimes B) = \varrho(A)\varrho(B) \in \mathrm{End}(V)$. Оператор $\widetilde{\varrho}(\mathrm{Id}_{\mathfrak{sl}_2}) \subset \mathrm{End}(V)$ называется *оператором Казимира* на $\mathfrak{sl}_2$-модуле V.

Задача 6.23. Проверьте, что $\widetilde{\varrho}$ является гомоморфизмом $\mathfrak{sl}_2$-модулей.

Если, опуская символ ϱ, как и ранее, обозначать буквами X, Y, Z сразу сами операторы, действующие на $\mathfrak{sl}_2$-модуле V, то оператор Казимира выразится через них по формуле

$$K = \frac{1}{4}\,(XY + YX) + \frac{1}{8}\,H^2\,.$$

Задача 6.24. При помощи явного вычисления, основанного на соотношениях (3-1), проверьте, что $[X, K] = [Y, K] = [H, K] = 0$, а так же что K действует на стандартном неприводимом $\mathfrak{sl}_2$-модуле $\mathcal{V}_m$ как гомотетия с коэффициентом $\dfrac{1}{8}\,(m^2 + 4\,m)$.

3.4.2. Лемма. *Всякий $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль коразмерности 1 обладает дополнительным одномерным тривиальным $\mathfrak{sl}_2$-подмодулем.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что всякий одномерный $\mathfrak{sl}_2$-модуль с неизбежностью тривиален, поскольку в коммутативной алгебра эндоморфизмов одномерного векторного пространства $H = [X, Y] = 0$, $2X = [H, X] = 0$, $2Y = -[H, Y] = 0$. Поэтому фактор модуль V/U по любому подмодуля $U \subset V$ коразмерности 1 тривиален, и значит, все три оператора X, Y, Z переводят V в U.

Строить дополнительный тривиальный одномерный подмодуль L к данному подмодулю $U \subset V$ коразмерности 1 мы будем индуктивно по $\dim U$. Если U тривиален (например, если $\dim U = 1$), то V тоже будет тривиален, поскольку по предыдущему замечанию

$$\mathfrak{sl}_2\,V = [\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_2]\,V \subset \mathfrak{sl}_2\,\mathfrak{sl}_2\,V \subset \mathfrak{sl}_2\,U = 0\,,$$

и доказывать нечего. Если $U \simeq \mathcal{V}_m$ нетривиальный неприводимый подмодуль, то оператор

$$\frac{8}{m^2 + 4\,m}\,K = \frac{1}{m^2 + 4\,m}\,\left(H^2 + 2\,(XY + YX)\right)$$

будет $\mathfrak{sl}_2$-инвариантным проектором V на U, так что искомый дополнительный подмодуль — это $L = \ker K$. Если же подмодуль U приводим, то мы выберем в U ненулевой неприводимый подмодуль $W \neq U$ и сначала по индуктивному предположению построим $\mathfrak{sl}_2$-инвариантное разложение фактор модуля

$$(V/W) = (U/W) \oplus (\widetilde{L}/W)\,,$$

где $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль $\widetilde{L} \subset V$ таков, что $L \cap U = W$ и $\dim(L/W) = 1$, а затем, применяя индуктивное предположение к паре $W \subset \widetilde{L}$, построим инвариантное разложение $\widetilde{L} = W \oplus L$. Тривиальный 1-мерный подмодуль $L \subset \widetilde{L} \subset V$ и будет искомым дополнением к U. □

3.4.3. Следствие. *Всякий конечномерный $\mathfrak{sl}_2$-модуль вполне приводим.*

Доказательство. Для того, чтобы построить $\mathfrak{sl}_2$-инвариантный проектор $\mathfrak{sl}_2$-модуля V на любой его подмодуль $U \subset V$, рассмотрим подпространства

$$\begin{aligned} W &= \{\,\varphi \in \mathrm{Hom}(V, U) \mid \varphi|_U = \lambda\,\mathrm{Id}_U\,,\ \lambda \in k\,\} \subset \mathrm{Hom}(V, U)\\ W' &= \{\,\varphi \in W \mid \varphi|_U = 0\,\} \subset W \end{aligned}$$

в $\mathfrak{sl}_2$-модуле $\mathrm{Hom}(V, U)$. По зад.6.6 они являются $\mathfrak{sl}_2$-подмодулями, причём коразмерность W' в W равна 1. По предыдущей лемме $W = W' \oplus L$, где L — тривиальный $\mathfrak{sl}_2$-модуль. По зад.6.6 его образующая, отнормированная так, чтобы её ограничение на U было тождественным оператором, и является искомым проектором.