Лекция 7
Представления конечных групп.

▷Инварианты и полупростота. ▷Представления конечных абелевых групп. ▷Двойственность Понтрягина. ▷Групповая алгебра ▷Регулярные представления ▷Скалярное произведение. ▷Теорема Машке. ▷Соотношения на число и размерности неприводимых представлений. ▷Матричные элементы неприводимых представлений. ▷Базисные идемпотенты и проекторы на изотипные компоненты. ▷Характеры. ▷Кольцо представлений. ▷Тензорное произведение над алгеброй. ▷Ограничение и индуцирование представлений. ▷Двойственность Фробениуса.

Если специально не оговаривается противное, всюду в этой лекции через G обозначается конечная группа, порядок которой $|G|$ не делится на характеристику основного поля k.

§1. Представления конечной группы.

1.1. Представления групп. Линейное представление группы G на векторном пространстве V — это гомоморфизм групп $G \xrightarrow{\varrho} GL(V)$, и буде он задан, пространство V называется *G-модулем*. Представление называется *тривиальным*, если $\operatorname{im}\varrho = \{\mathrm{Id}_V\}$, и *эффективным* или *точным*, если $\ker\varrho = \{e\}$. Если это не приводит к путанице, символ ϱ в обозначении действия обычно опускают и пишут просто gv вместо $\varrho(g)v$.

> Задача 7.1. Докажите, что любая конечная подгруппа $G \subset GL_n(k)$ над алгебраически замкнутым полем k, характеристика которого не делит порядок группы, состоит только из диагонализуемых операторов.

Прямая сумма, тензорное произведение, а так же внешние и симметрические степени G-модулей U, V сами являются G-модулями относительно естественного действия G по правилам $g(u,v) = (gu, gv)$, $g(u\otimes v) = (gu)\otimes(gv)$, $g(u\wedge v) = (gu)\wedge(gv)$ и т. д.

Двойственное представление $G \xrightarrow{\varrho^*} GL(V^*)$ к представлению $G \xrightarrow{\varrho} GL(V)$ определяется так, чтобы $\left\langle\, \varrho^*(g)\,\xi \;,\; \varrho(g)\,v \,\right\rangle = \left\langle\, \xi \;,\; v \,\right\rangle$ при всех g, ξ, v, т. е. правилом $\varrho^*(g)\xi \;:\; v \longmapsto \xi\,(g^{-1}v)$. Матрицы операторов $\varrho(g)$ и $\varrho^*(g)$ в двойственных базисах транспонированы и обратны друг другу.

Действие G на пространстве линейных операторов $\operatorname{Hom}(U,V) = U^*\otimes V$ между двумя G-модулями U и V, согласно предыдущему, происходит по формуле $g \;:\; \varphi \longmapsto g\varphi g^{-1}$. Подпространство неподвижных векторов этого действия суть $\operatorname{Hom}_G(U,V)$.

Задача 7.2. Докажите, что если образ d-мерного представления ϱ лежит в $SL(V)$, то дополнительные внешние степени $\Lambda^k\varrho$ и $\Lambda^{d-k}\varrho$ этого представления изоморфны для всех $0 \leqslant k \leqslant d$.

1.2. Инварианты. G-подмодуль $V^G \stackrel{\text{def}}{=} \{\, v \in V \mid gv = v \quad \forall\, g \in G \,\} \subset V$ называется *пространством инвариантов* представления $G \to V$.

1.2.1. Теорема. *Над полем, характеристика которого не делит порядок группы $|G|$, оператор*

$$\natural = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g$$

задаёт G-инвариантный пректор любого G-модуля на подмодуль инвариантов.

Доказательство. Поскольку при фиксированном $h \in G$ элементы hg и gh взаимно однозначно пробегают G вместе с g, инвариантность оператора $\natural$ проверяется выкладкой

$$h\left(\sum_{g\in G} g\right) = \sum_{g\in G} hg = \sum_{g\in G} g = \sum_{g\in G} gh = \left(\sum_{g\in G} g\right) h \ .$$

Аналогично устанавливается, что образ $v^\natural$ любого вектора $v \in V$ будет G-инвариантен:

$$|G|\, hv^\natural = h\left(\sum_{g\in G} g\, v\right) = \sum_{g\in G} hg\, v = \sum_{g\in G} g\, v = |G|\, v^\natural \ .$$

Наконец, $v^\natural = v$ для любого инвариантного вектора v, поскольку $\sum\limits_{g\in G} gv = |G|\, v$. □

1.3. Полупростота. Любое представление $G \to GL(V)$ конечной группы (над полем характеристика которого не делит порядок этой группы) вполне приводимо, поскольку пользуясь предыдущей теоремой, мы можем построить G-инвариантный проектор на любой подмодуль $U \subset V$. Для этого достаточно убедиться, что проекция на инварианты

$$\mathrm{Hom}(V,U) \xrightarrow{\ \natural\ } \mathrm{Hom}_G(V,U)$$

переводит любой пректор π снова в проектор. Из соотношений $\pi|_U = \mathrm{Id}_U$ и $g^{-1}U \subset U$ вытекает, что

$$\pi^\natural u = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\pi g^{-1}u = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gg^{-1}u = \frac{1}{|G|}\,|G|\, u = u \qquad \forall\, u \in U \ ,$$

т. е. $\pi^\natural|_U = \mathrm{Id}_U$.

1.4. Представления конечных абелевых групп. Все неприводимые представления конечной абелевой группы одномерны. Линейный оператор на одномерном пространстве — это умножение на число. Задание неприводимого предсталения конечной абелевой группы равносильно заданию мультипликативного гомоморфизма

$$G \xrightarrow{\ \chi\ } k \ : \ \chi(g_1g_2) = \chi(g_1)\chi(g_2) \ ,$$

сопоставляющего элементу группы то число, на которое он умножает, так что действие G происходит по праилу

$$gv = \chi(g)\, v \ .$$

Гомоморфизм χ называется *характером* абелевой группы G, и соответствующий одномерный неприводимый G-модуль обозначается через V_χ.

Задача 7.3. Докажите, что $V_\chi \simeq V_\psi$ тогда и только тогда, когда $\chi = \psi$.

В пространстве $k[G]$ всех k-значных функций на группе G характеры образуют абелеву подгруппу относительно поточечного умножения значений. Она называется *двойственной* к G и обозначается $G^\wedge$. Единицей в $G^\wedge$ служит *тривиальный характер* $\chi_e \equiv 1$, отвечающий тривиальному представлению.

Задача 7.4. Проверьте, что характер тензорного произведения двух одномерных представлений абелевой группы G равен произведению их характеров в $G^\wedge$, а характер двойственного представления обратен в $G^\wedge$ характеру исходного.

Группа G действует на $k[G]$ по правилу $f(x) \overset{g}{\longmapsto} gf(x) \overset{\text{def}}{=} f(xg)$. Разложим это представление в прямую сумму одномерных неприводимых представлений

$$k[G] = \bigoplus_\chi V_\chi^{\oplus m_\chi} \ ,$$

Всякая функция $f \in V_\chi$ удовлетворяет равенству $f(xg) = \chi(g)f(x)$, подставляя в которое $x = e$, получим $f(g) = \dfrac{1}{f(e)}\,\chi(g)$, т. е. f пропорциональна характеру $\chi \in k[G]$. Таким образом, каждое неприводимое представление V_χ входит в $k[G]$ с кратностью $m_\chi = 1$ и соответствующее одномерное подпространство в $k[G]$ натянуто на характер χ. В частности, характеры составляют базис в $k[G]$, и $|G^\wedge| = |G|$.

Отображение $g \longmapsto \mathrm{ev}_g$, сопоставляющее элементу $g \in G$ k-значную функцию ev_g на $G^\wedge$, вычисляющую значение характера в точке

$$\mathrm{ev}_g \ : \ \chi \longmapsto \chi(g)$$

является гомоморфизмом из G в $G^{\vee\vee}$, поскольку

$$\mathrm{ev}_g(\chi_1\chi_2) = \mathrm{ev}_g(\chi_1)\mathrm{ev}_g(\chi_2) \qquad \text{и} \qquad \mathrm{ev}_{g_1g_2}(\chi) = \mathrm{ev}_{g_1}(\chi)\mathrm{ev}_{g_2}(\chi) \ .$$

Если g лежит в его ядре, то $\chi(g) = 1$ для всех $\chi \in G^\wedge$, т. е. g действет тривиально в любом представлении группы G. В частности, для любой функции $f \in k[G]$ будем иметь $f(xg) = f(x)$, что возможно только если $xg = x$ для каждого $x \in G$, т. е. только когда $g = e$. Таким образом, имеется канонический изоморфизм абелевых групп $G \xrightarrow{\sim} G^{\vee\vee}$, известный как *двойственность Понтрягина*.

§2. Групповая алгебра конечной группы.

2.1. Определение групповой алгебры. Со всякой конечной группой G можно канонически связать ассоциативную алгебру, обозначаемую kG и называемую *групповой алгеброй*

группы G над полем k, в которую G вложена в качестве подгруппы, составляющей базис векторного пространства kG. Элементы этой алгебры по определению представляют собой конечные формальные линейные комбинации вида

$$\sum_{g\in G} c_g\, g\ , \quad c_g \in k\ ,$$

которые складываются и перемножаются по стандартным ассоциативным и дистрибутивным правилам раскрытия скобок, с учётом, однако, того, что умножение элементов группы не обязательно коммутативно.

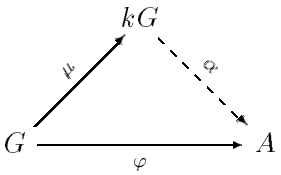
Задача 7.5. Докажите, что сопоставление целому числу m монома t^m устанавливает изоморфизм между $k\mathbb{Z}$ и кольцом полиномов Лорана $k[t,t^{-1}]$, а также между $k(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ и факторкольцом $k[t]/(t^m-1)$.

Всякому представлению группы $G \xrightarrow{\varrho} GL(V)$ канонически соответствует представление групповой алгебры $kG \xrightarrow{\varrho} \mathrm{End}(V)$, которое является продолжением ϱ по линейности с базиса на всё пространство kG

$$\varrho\left(\sum_g c_g g\right) = \sum_g c_g \varrho(g)\ ,$$

и представляет собой гомоморфизм ассоциативных алгебр, образ которого суть линейная оболочка $A_{\varrho(G)} \subset \mathrm{End}(V)$ операторов из $\varrho(G)$. Таким образом, теория представлений группы G тождественна теории представлений ассоциативной алгебры kG.

Задача 7.6. Пусть ассоциативная k-алгебра kG вместе с мультипликативным гомоморфизмом $G \xrightarrow{\mu} kG$ обладают следующим свойством универсальности: всякий мультипликативный гомоморфизм $G \xrightarrow{\varphi} A$ в ассоциативную k-алгебру A единственным образом представляется в виде композиции



μ и гомоморфизма k-алгебр $k[G] \xrightarrow{\alpha} A$. Докажите, что kG определяется этим универсальным сойством однозначно с тогностью до единственного изоморфизма, перестановочного с μ.

2.2. Функции на группе и прямое преобразование Фурье. Пространство $k[G]$ функций на группе G является коммутативной ассоциативной алгеброй относительно операций поточечного сложения и умножения значений функций. С другой стороны, функция $\psi \in k[G]$, сопоставляя каждому базисному вектору $g \in kG$ число, определяет на kG линейный функционал $\psi\ :\ \sum\limits_g c_g g \longmapsto \sum\limits_g c_g \psi(g)$, так что $k[G]$ канонически изоморфно двойственному пространству групповой алгебры $(kG)^*$. Наконец, для набора чисел $\psi(g)$ имеется и третья интерпретация — его можно рассматривать как набор коэффициентов, задающих линейную комбинацию элементов группы, т. е. как элемент самой групповой алгебры

$$\psi^\wedge = \sum_g \psi(g)\, g \in kG\ .$$

Отображение $(kG)^* = k[G] \to kG$, переводящее ψ в $\psi^\wedge$, мы будем называть *прямым преобразованием Фурье*. Это линейный изоморфизм векторных пространств, превращающий стандартный базис $k[G]$ из δ-функций

$$\delta_g(h) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{при} \quad h = g \\ 0 & , \quad \text{при} \quad h \neq g \end{cases} ,$$

в базис kG, состоящий из элементов группы G. Он не является гомоморфизмом алгебр, и прообраз (некоммутативного) умножения в kG задаёт на $k[G]$ мультипликативную операцию, называемую *свёрткой*

$$\varphi * \psi(g) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{h\in G} \varphi(gh^{-1})\,\psi(h) = \sum_{h\in G} \varphi(h)\,\psi(h^{-1}g) = \sum_{h_1h_2=g} \varphi(h_1)\,\psi(h_2) .$$

Задача 7.7. Проверьте, что $(\varphi * \psi)^\wedge = \varphi^\wedge\psi^\wedge$ в kG.

В дальнейшем мы чато будем без специльных оговорок отождествлять kG и $k[G]$ при помощи прямого преобразования Фурье. В частности, каждой функции $\psi \in k[G]$ в любом линейном представлении $G \xrightarrow{\varrho} GL(V)$ канонически соответствует линейный оператор[1]

$$\varrho(\psi) \stackrel{\text{def}}{=} \varrho(\psi^\wedge) = \sum_g \psi(g)\varrho(g) \in \mathrm{End}(V)$$

и композиция таких операторов соответствует свёртке функций: $\varrho(\varphi)\,\varrho(\psi) = \varrho(\varphi * \psi)$.

2.3. Регулярные представления. Гомоморфизм $G \xrightarrow{\ell} \mathrm{End}(kG)$, сопоставляющий элементу $g \in G$ оператор ℓ_g левого умножения на g: $x \longmapsto gx$, называется *левым регулярными представлениями* группы G. Двойственное представление в $k[G]$ представляет собой левый сдвиг аргумента на g^{-1}:

$$\ell_g^*\varphi(h) = \varphi(g^{-1}h) .$$

Прямое преобразование Фурье отождествляет их между собой, поскольку

$$\ell_g \sum_h \varphi(h)\,h = \sum_h \varphi(h)\,gh = \sum_t \varphi(g^{-1}t)\,t .$$

Кроме левого, имеется аналогичное *правое регулярное представление* $G \xrightarrow{\ell} \mathrm{End}(kG)$, которое сопоставляет $g \in G$ оператор r_g правого умножения на g^{-1}: $x \longmapsto xg^{-1}$, и на языке функций состоит в правом сдвиге аргумента на g: $r_g^*\varphi(h) = \varphi(hg)$.

2.4. Скалярное произведение на kG. Левое регулярное представление

$$kG \xrightarrow{\ell} \mathrm{End}(kG)$$

вкладывает групповую алгебру kG в алгебру $\mathrm{End}(kG)$, на которой имеется каноническая форма следа. Ограничение этой формы на kG, нормированное по формуле

$$(a,b) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|^2}\,\mathrm{tr}\,(\ell_a\ell_b) = \frac{1}{|G|^2}\,\mathrm{tr}\,(\ell_{ab}) ,$$

[1] в классических учебниках по гармоническому анализу преобразованием Фурье, собственно, и называется сопоставление каждой функции на группе набора операторов на всех неприводимых представлениях этой группы, задаваемое по написанной нами формуле

задаёт на kG невырожденное симметричное скалярное произведение, оносительно которого элементы группы G перемножаются по правилу

$$(g,h) = \begin{cases} 1/|G| & , \quad \text{при} \quad h = g^{-1} \\ 0 & , \quad \text{при} \quad h \neq g^{-1} \end{cases} .$$

Задача 7.8. Проверьте, что $\operatorname{tr}(\ell_g) = \begin{cases} |G| & , \quad \text{при} \quad g = e \\ 0 & , \quad \text{при} \quad g \neq e \end{cases}$.

Поскольку $\ell_{ab}\ell_c = \ell_{abc} = \ell_a \ell_{bc}$, скалярное произведение на $k[G]$ обладает свойствами

$$\begin{gathered} (ab,c) = (a,bc) \\ ab = 0 \implies (a,b) = 0 \end{gathered} \qquad \forall\, a,b,c \in k\,[G] \tag{2-1}$$

Задача 7.9. Докажите, что ортогональное дополнение к левому идеалу в kG является правым идеалом и наоборот. В частности, ортогональное дополнение к двустороннему идеалу является также двусторонним идеалом.

Прямое преобразование Фурье переносит скалярное промзведение из kG в $k[G]$, где оно приобретает вид

$$(\varphi,\psi) \overset{\text{def}}{=} (\varphi^\wedge,\psi^\wedge) = \sum_{g,h\in G} \varphi(g)\,\psi(h)\,(g,h) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \varphi(g)\,\psi(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}\,\varphi * \psi\,(e)\ .$$

2.5. Обратное преобразование Фурье. Изоморфизм $kG \xrightarrow{\sim} (kG)^* = k[G]$, задаваемый следовым скалярным произведением, называется *обратным преобразованием Фурье*[2]. Он переводит $c = \sum\limits_g c_g g \in kG$ в функцию

$$c^\vee \ :\ c^\vee(g) = \frac{1}{|G|}\,c_{g^{-1}}\ .$$

Вопреки названиям, призванным отражать лишь напавления стрелок, прямое и обратное преобразования Фурье

$$kG \underset{\vee}{\overset{\wedge}{\rightleftarrows}} k[G]$$

отнюдь не являются обратными другу линейными операторами. Их композиции действуют на функции и на элементы группы по правилам

$$\psi^{\wedge\vee}(g) = \frac{1}{|G|}\,\psi(g^{-1}) \qquad \text{и} \qquad g^{\vee\wedge} = \frac{1}{|G|}\,g^{-1}\ .$$

Обратное преобразование Фурье отождествляет левое регулярное представление ℓ на kG с правым регулярным представлением r^* на $k[G]$, а правое r — с левым ℓ^*.

2.6. Строение групповой алгебры. Разложим левое регулярное представление в прямую сумму неприводимых: $kG = \bigoplus\limits_\varrho V_\varrho^{m_\varrho}$. Каждое неприводимое относительно левого умножения инвариантное подпространство $V_\varrho \subset kG$ представляет собой *минимальный левый идеал*[3] ал-

[2]Прямое преобразование Фурье $k[G] \xrightarrow{\wedge} kG\ :\ \varphi \longmapsto \varphi^\wedge$, разумеется, тоже соответствует скалярному прозведению, которое в терминах $k[G]$ задаётся формулой $\langle\, \varphi\ ,\ \psi\, \rangle = \varphi(\psi^\wedge)$ (вычисление значения функции в точке). δ-функции и элементы группы составляют по отношению к нему *ортонормальные* базисы. Однако, это произведение не играет существенной роли в теории представлений, и в этих лекциях не рассматривается.

[3]идеал называется *минимальным*, если он не содержит ненулевых идеалов, отличных от него самого

гебры kG. Поскольку правое умножение на любой элемент $y \in kG$ перестановочно с левым действием G, по лемме Шура $V_\varrho y \subset \bigoplus_\varrho V_\varrho^{m_\varrho}$ может нетривиально проектироваться только на прямые слагаемые, изоморфные V_ϱ. Поэтому сумма $I_\varrho = V_\varrho^{m_\varrho}$ всех минимальных левых идеалов, изоморфных данному неприводимому представлению V_ϱ, является двусторонним идеалом в $k[G]$. Из равенства $I_\varrho I_\lambda \subset I_\varrho \cap I_\lambda = 0$ и соотношения (2-1) следует, что идеалы I_ϱ попарно ортогональны относительно скалярного произведения на kG. Таким образом, алгебра kG представляет собой ортогональную прямую сумму своих двусторонних идеалов I_ϱ.

Задача 7.10. Докажите, что I_r являются минимальными двусторонними идеалами алгебры $k[G]$, и что все двусторонние идеалы в $k[G]$ исчерпываются прямыми суммами идеалов I_ϱ.

2.6.1. Теорема Машке. *Групповая алгебра конечной группы над алгебраически замкнутым полем, характеристика которого не делит порядок группы, изоморфна прямой сумме* $\bigoplus_\varrho \operatorname{End}(V_\varrho)$ *алгебр эндоморфизмов всех различных неприводимых представлений. При этом изоморфизме каждый двусторонний идеал* I_ϱ *изоморфно отображается на соответсвующую алгебру* $\operatorname{End}(V_\varrho)$.

Доказательство. Всякому представлению $G \xrightarrow{\varrho} GL(V_\varrho)$ отвечает гомоморфизм алгебр $kG \xrightarrow{\varrho} \operatorname{End}(V_\varrho)$, который переводит $\sum c_g g$ в $\sum c_g \varrho(g)$. Образ этого гомоморфизма совпадает с линейной оболочкой $A_{\varrho(G)}$ операторв из подгруппы $\varrho(G) \subset \operatorname{End}(V_\varrho)$. Если представление V_ϱ неприводимо, то по теореме Бернсайда $A_{\varrho(G)} = \operatorname{End}(V_\varrho)$, и стало быть, гомоморфизм $kG \xrightarrow{\varrho} \operatorname{End}(V_\varrho)$ эпиморфен. Прямая сумма этих эпиморфизмов по всем различным неприводимым представлениям группы G представляет собой эпиморфизм алгебр

$$kG \xrightarrow{\oplus\varrho} \bigoplus_\varrho \operatorname{End}(V_\varrho)\,, \tag{2-2}$$

переводящий элемент g в набор эндоморфизмов $\varrho(g)$. Его ядро состоит из таких $x \in kG$, которые действуют нулевым оператором во всех неприводимых представлениях. Раскладывая левое регулярное представление в прямую сумму неприводимых, мы видим, что левое умножение на такой элемент x является нулевым эндоморфизмом kG, откуда $x = \lambda_x(1) = 0$. Поскольку ограничение эпиморфизма $kG \xrightarrow{\varrho} \operatorname{End}(V_\varrho)$ на любой идеал $I_\lambda \neq I_\varrho$ тривиально по лемме Шура, ограничение представления ϱ на I_ϱ является изоморфизмом этого идеала с алгеброй $\operatorname{End}(V_\varrho)$. □

2.6.2. Следствие. *Сумма квадратов размерностей всех различных неприводимых представлений конечной группы G над алгебраически замкнутым полем, характеристика которого не делит $|G|$, равна порядку группы $|G|$.* □

2.6.3. Следствие (формула Планшереля). *Для любых $x, y \in kG$*

$$|G|\,(x,y) = \frac{1}{|G|}\sum_\varrho \dim(V_\varrho)\operatorname{tr}\left(\varrho(x)\varrho(y)\right)\,,$$

где суммирование происходит по всем различным неприводимым представлениям ϱ.

Доказательство. Вычислим $|G|\,(\varphi,\psi) = \dfrac{1}{|G|}\operatorname{tr}(\ell_{xy})$, пользуясь изоморизмом (2-2). В терминах $\oplus\operatorname{End}(V_\varrho)$ действие ℓ_{xy} на прямом слагаемом $\operatorname{End}(V_\varrho)$ состоит в левом умножении на

$\varrho(x)\,\varrho(y)$. Но при умножении слева на матрицу z базисная матричная единица ε_{ij} переходит в $\sum\limits_{\nu} z_{\nu i}\varepsilon_{\nu j}$, так что след левого умножения на z равен $\sum\limits_{j}\sum\limits_{i} z_{ii} = \dim(V_\varrho)\,\mathrm{tr}\,(z)$. □

Задача 7.11. Докажите, что каждое неприводимое представление V_ϱ группы G входит в разложение как левого так и праого регулярного представления с кратностью, равной $\dim V_\varrho$.

2.7. Центр групповой алгебры, т. е. коммутативная подалгебра

$$Z(kG) = \{\, z \in kG \,|\, zx = xz \quad \forall\, x \in kG \,\}\,,$$

отождествляется посредством прямого преобразования Фурье с подпространством функций, постоянных на классах сопряжённых элементов. В самом деле, равенство $g\varphi^\wedge = \varphi^\wedge g$ достаточно проверять только для всех $g \in G$, где оно равносильно условию $\varphi(g^{-1}h) = \varphi(hg^{-1})$ $\forall\, g, h \in G$, которое после переобозначения $s = g^{-1}h$ превращается в $\varphi(s) = \varphi(gsg^{-1})$. В частности, размерность $\dim Z(kG)$ равна числу классов сопряжённых элементов в группе G. С другой стороны, центр каждой из алгебр $\mathrm{End}(V)$ одномерен, ибо состоит из гомотетий, а центр прямой суммы алгебр совпадает с прямой суммой их центров, ибо перестановочность сомножителей достаточно проверять отдельно на каждом слагаемом прямой суммы. Мы получаем

2.7.1. Следствие. *Число неприводимых представлений равно числу классов сопряжённых элементов.* □

2.8. Матричные элементы неприводимых представлений. Фиксация базиса в пространстве неприводимого представления V_ϱ позволяет записывать все операторы $\varrho(g)$ матрицами $(\varrho_{ij}(g))$. Матричне элементы $\varrho_{ij}(g)$ являются k-значными функциями на группе G, и тем самым, лежат в $k[G]$.

2.8.1. Утверждение. *Матричные элементы неприводимых представлений образуют в $k[G]$ базис, причём в его матрице Грама $\big(\,(\varrho_{\mu\nu}, \lambda_{\alpha\beta})\,\big)$ отличны от нуля только скалярные произведения $(\varrho_{ij}, \varrho_{ji}) = \dfrac{1}{\dim V_\varrho}$.*

Доказательство. Рассмотрим базисный линейный оператор $V_\varrho \xrightarrow{\varepsilon_{\alpha\beta}} V_\lambda$, матрица которого имеет 1 в позиции $(\alpha\beta)$ и нули в остальных местах. Его усреднение

$$\widetilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \lambda(g)\varepsilon_{\alpha\beta}\varrho(g^{-1})\,,$$

является G-гомоморфизмом между двумя неприводимыми представлениями, и по лемме Шура при $\lambda \neq \varrho$ записывается нулевой матрицей, а при $\lambda = \varrho$ — скалярной матрицей, у которой на главной диагонали стоит число

$$\frac{1}{\dim V_\varrho}\,\mathrm{tr}\,\widetilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\dim V_\varrho}\,\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{tr}\,\left(g\,\varepsilon_{\alpha\beta}\,g^{-1}\right) = \frac{1}{\dim V_\varrho}\,\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{tr}\,\left(\varepsilon_{\alpha\beta}\right) =$$

$$\frac{1}{\dim V_\varrho}\mathrm{tr}\,\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1/\dim V_\varrho & , \quad \text{при} \quad \alpha = \beta \\ 0 & , \quad \text{при} \quad \alpha \neq \beta \end{cases}$$

С другой стороны (ij)-тый элемент матрицы $\widetilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ равен $\dfrac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}\lambda_{i\alpha}(g)\,\varrho_{\beta j}(g^{-1})=(\lambda_{i\alpha},\varrho_{\beta j})$, что и даёт нужные соотношения ортогональности. □

2.8.2. Следствие. *Оператор $\varrho^{\wedge}_{ij}\in kG$ действует во всех неприводимых представлениях $\lambda\neq\varrho^*$ нулём, а в неприводимом представлении ϱ^* — оператором, матрица которого в двойственном базисе пространства V^* имеет в позиции (ij) число $|G|/\dim V_\varrho$ и нули в остальных местах.*

Доказательство. Представление $kG\xrightarrow{\lambda}\mathrm{End}(V_\lambda)$ переводит элемент $\varrho^{\wedge}_{ij}=\sum\limits_{g\in G}\varrho_{ij}(g)g\in k[G]$ в оператор $\sum\limits_{g\in G}\varrho_{ij}(g)\lambda(g)\in\mathrm{End}(V_\lambda)$, матрица которого имеет в позиции (mn) число

$$\sum_{g\in G}\varrho_{ij}(g)\,\lambda_{mn}(g)=\sum_{g\in G}\varrho_{ij}(g)\,\lambda^*_{nm}(g^{-1})=|G|\,(\varrho_{ij},\lambda^*_{nm})\ ,$$

равное $|G|/\dim V_\varrho$ при $\lambda^*=\varrho$ и $(nm)=(ji)$, и нулю во всех остальных случаях. □

2.8.3. Следствие. *Линейная оболочка всех матричнх элементов неприводимого представления ϱ не зависит от выбора базиса в V_ϱ и при помощи прямого преобразования Фурье отождествляется с идеалом I_{ϱ^*}.* □

Задача 7.12. Докажите, что линейная оболочка элементов каждого столбца матриц неприводимого представлении ϱ образует в $k[G]$ неприводимый подмодуль относительно левого регулярного действия G, и что этот подмодуль изоморфен двойственному неприводимому представлению ϱ^*.
Указание: Левое регулярное действие элемента $g\in G$ переводит функцию $\varrho_{ij}(h)$ в

$$\ell^*_g\varrho_{ij}(h)=\varrho_{ij}(g^{-1}h)=\big(\varrho(g^{-1}\varrho(h)\big)_{ij}=\sum_{\nu}\varrho_{i\nu}(g^{-1})\,\varrho_{\nu j}(h)\ ,$$

Задача 7.13. Докажите, что двойственные представления $G\xrightarrow{\varrho}V$ и $G\xrightarrow{\varrho^*}V^*$ изоморфны тогда и только тогда, когда на пространстве V существует невырожденная G-инвариантная билинейная форма[4], и покажите, что если на неприводимом G-модуле над алгебраически замкнутым полем такая форма существует, то она единственна с точностью до пропорциональности.

Задача 7.14. Докажите, что над полем $\mathbb{R}$ на любом представлении конечной группы G имеется симметричная положительно определённая G-инвариантная форма.

Задача 7.15. Докажите, что над полем $\mathbb{C}$ на любом представлении конечной группы G имеется эрмитова G-инвариантная форма и выведите отсюда, что всякое комплексное линейное представление $G\xrightarrow{\varrho}V$ изоморфно своему эрмитово сопряжённому представлению $G\xrightarrow{\overline{\varrho}^*}\overline{V}^*$, (задаваемому в двойственном базисе матрицами, которые обратны, транспонированы и комплексно сопряжены к матрицам представления ϱ).

2.9. Базисные идемпотенты. Ортогональная прекция $e_\varrho\in I_\varrho$ единицы $e\in kG$ на идеал I_ϱ в любом отличном от ϱ неприводимом представлении действует нулевым, а в представлении ϱ — единичным оператором. Поэтому образ элемента e_ϱ в любом линейном представлении W

[4]билинейная форма b на V называется *G-инвариантной*, если $b(gv,gw)=b(v,w)\quad\forall\,v,w\in V\ ,\ \ \forall\,g\in G$

является проектором на сумму всех тех неприводимых составляющих W, которые изоморфны V_ϱ. Эта сумма называется *ϱ-изотипной компонентой* представления W, а проекторы e_ϱ — *базисными идемпотентами*[5].

Задача 7.16. Покажите, что базисные идемпотенты в kG перемножаются по праилам

$$e_\varrho e_\lambda = \begin{cases} e_\varrho & , \quad \text{при} \quad \lambda = \varrho \\ 0 & , \quad \text{при} \quad \lambda \neq \varrho \end{cases}$$

и составляют ортогональный базис в центре групповой алгебры, имея скалярные квадраты

$$(e_\varrho, e_\varrho) = \frac{1}{|G|^2} \operatorname{tr} \ell_{e_\varrho} = \left(\frac{\dim V_\varrho}{|G|} \right)^2 .$$

Задача 7.17. Докажите, что e_ϱ порождает в kG минимальный левый идеал $kG \cdot e_\varrho \subset kG$, который как G-модуль изоморфен неприводимому представлению V_ϱ.

Задача 7.18. Докажите, что двусторонний идеал $kG \cdot e_\varrho \cdot kG \subset kG$, порождённый e_ϱ в kG совпадает с I_ϱ.

Согласно Сл.2.8.2 базисные идемпотенты выражаются через матричные единицы по формуле

$$e_\varrho = \frac{\dim V_\varrho}{|G|} \sum_\nu \varrho^*_{\nu\nu}{}^\wedge = \frac{\dim V_\varrho}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_i \varrho^*_{ii}(g)\, g = \frac{\dim V_\varrho}{|G|} \sum_{g \in G} \operatorname{tr} \varrho(g^{-1})\, g$$

2.10. Характеры. Функция $\chi_\varrho(g) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tr} \varrho(g) = \sum_\nu \varrho_{\nu\nu} \in k[G]$ называется *характером представления* ϱ. Характеры неприводимых представлений связаны с базисными идемпотентами соотношением

$$e_\varrho = \frac{\dim V_\varrho}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\varrho(g^{-1})\, g \ .$$

В частности, проектор произвольного представления $G \xrightarrow{R} GL(W)$ на ϱ-изотипную компонету может быть выражен через матричные элементы по формуле

$$\pi_\varrho = \frac{\dim V_\varrho}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\varrho(g^{-1})\, R(g) \in \operatorname{End}_G(W)$$

Поскольку след оператора не меняется при сопряжении, характер $\chi_R(g) = \operatorname{tr} R(g)$ любого представления $G \xrightarrow{R} W$ не зависит от выбора базиса в W и постоянен на классах сопряжённых элементов, т. е. его (прямой) Фурье-образ лежит в центре групповой алгебры $k[G]$.

2.10.1. Утверждение. *Прямые Фурье-образы характеров неприводимых представлений составляют ортонормальный базис в центре групповой алгебры.*

Доказательство. В силу соотношений ортогональности из Утв.2.8.1 для неприводимого представления ϱ имеем

$$(\chi_\varrho, \chi_\varrho) = \left(\sum_\nu \varrho_{\nu\nu} \ , \ \sum_\mu \varrho_{\mu\mu} \right) = \sum_\nu \left(\varrho_{\nu\nu} \ , \ \varrho_{\nu\nu} \right) = \sum_\nu \frac{1}{\dim V_\varrho} = 1 \ .$$

и $(\chi_r, \chi_\lambda) = 0$ для неизоморфных неприводимых представлений λ и ϱ. □

[5] всякий элемент кольца, совпадающий со своим квадратом, называется *идемпотентом*

§3. Техника работы с представлениями.

3.1. Пример: некоторые представления симметрических групп. Поскольку классы сопряжённнных элементов симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ взаимно однозначно соответствуют n-клеточным диаграммам Юнга[6], число неприводимых представлений $\mathfrak{S}_n$ равно количеству разбиений числа n.

Задача 7.19. Выясните, сколько элементов в классе сопряжённости $\mathfrak{S}_n$, состоящем из всех перестановок, распадающихся в произведение m_1 независимых циклов длины 1, m_2 независимых циклов длины 2, ..., m_n независимых циклов длины n (где $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu \cdot m_\nu = n$).

Ответ: $\dfrac{n!}{m_1!\,1^{m_1} m_2!\,2^{m_2} \cdots m_n!\,n^{m_n}}$

Задача 7.20. Перечислите классы сопряжённых элементов в знакопеременных группах $\mathfrak{A}_n$ с $n \leqslant 6$ и определите число элементов в каждом из них.

Группа $\mathfrak{S}_3$ имеет ровно три неприводимых представления: тривиальное одномерное, одномерное знаковое (в котором $\sigma v = \operatorname{sgn}(\sigma)\, v$), и двумерное представление группой симметрий треугольника.

Задача 7.21. Нарисуем на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ правильный треугольник с центром в нуле и вершиной в единице и рассмотрим риманову сферу $\mathbb{CP}_1$, экватор которой описан вокруг этого треугольника. Стереографическая проекция из северного полюса сферы отождествляет плоскость $\mathbb{C}$ со стандартной аффинной картой на $\mathbb{CP}_1$, так что группа симметрий треугольника, реализованная вращениями сферы, будет действовать на $\mathbb{C}$ дробно линейными заменами координаты z. Напишите явные формулы для всех шести таких замен и найдите хотя бы одну инвариантную относительно них непостоянную рациональную функцию от z.

У группы $\mathfrak{S}_4$ есть ровно пять неприводимых представлений: два одномерных, трёхмерное представление группой симметрий тетраэдра, трёхмерное представление группой вращений (т. е. сохраняющих ориентацию симметрий) куба, и двумерное представление группой треугольника, индуцированное эпиморфизмом $\mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$, который задаётся факторизацией по нормальной подгруппе Клйна $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \subset \mathfrak{S}_4$.

Задача 7.22. Разложите на неприводимые естественные представления группы вращений куба в пространстве комплекснозначных функций

а) на множестве вершин;

б) на множестве рёбер;

в) на множестве граней.

Задача 7.23. Сделайте то же самое для группы симметрий правильного тетраэдра.

Задача 7.24. Как раскладываются в сумму неприводимых трёхмерные представления группы $\mathfrak{S}_4$ при ограничении на подгруппу $\mathfrak{S}_3$ перестановок первых трёх символов?

У каждой симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ есть два одномерных представления (тривиальное и знаковое) и $(n-1)$-мерное представление симметриями правильного симплекса. Последнее изоморфно подмодулю, заданному уравнением $\sum x_\nu = 0$, в *тавтологическом* представлении $\mathfrak{S}_n$ перестановками базисных векторов координатного пространства k^n.

3.2. Вычисления характеров. Если группа G действует на векторном пространстве перестановками базисных векторов, то значение характера такого представления на элементе

[6] длины строк диаграммы суть длины независимх циклов, на которые раскладывается перестановка

$g \in G$ равно числу неподвижных элементов перестановки g. Так например, характер регулярного представления

$$\chi_\ell(g) = \chi_r(g) = \begin{cases} |G| & , \quad \text{если} \quad g = e \\ 0 & , \quad \text{если} \quad g \neq e \end{cases}$$

Задача 7.25. Вычислите характеры тавтологического и симплициального представлений $\mathfrak{S}_n$.

Проследить за тем, как меняются характеры при стандартных операциях над представлениями, проще всего записывая матрицы операторов в стандартных же базисах, связанных с этими операциями.

Задача 7.26. Докажите, что $\forall\, g \in G$ и для любых представлений ϱ, λ

а) $\chi_{\varrho\oplus\lambda}(g) = \chi_\varrho(g) + \chi_\lambda(g)$

б) $\chi_{\varrho\otimes\lambda}(g) = \chi_\varrho(g)\chi_\lambda(g)$

в) $\chi_{\varrho^*}(g) = \chi_\varrho(g^{-1})$

Значения характеров симметрических и внешних степеней данного представления ϱ на данном элементе $g \in G$ проще всего вычислять в базисе, где матрица $\varrho(g)$ диагональна.

Задача 7.27. Докажите, что производящая функция для характеров внешних степеней представления ϱ имеет вид

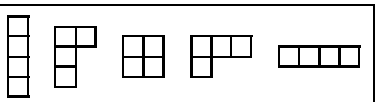
$$\sum_{\nu \geqslant 0} \chi_{\Lambda^\nu \varrho}(g)\, t^\nu = \det(1 + t\, \varrho(g)) \ .$$

Задача 7.28. Докажите, что производящая функция для характеров симметрических степеней представления ϱ имеет вид

$$\sum_{\nu \geqslant 0} \chi_{S^\nu \varrho}(g)\, t^\nu = \frac{1}{\det(1 - t\, \varrho(g))} \ .$$

Характеры представлений, заданных геометрически, легко вычисляются как суммы собственных значений соответствующих поворотов и отражений.

Задача 7.29. Убедитесь, что значения характеров неприводимых представлений симметрической группы $\mathfrak{S}_4$ на классах сопряжённых элеметов задаются таблицей:

классы					
число элементов	1	6	3	8	6
значения характеров:					
тривиального	1	1	1	1	1
знакового	1	−1	1	1	−1
тетраэдрального	3	−1	−1	0	−1
кубического	3	1	−1	0	1
треугольного	2	0	2	−1	0

Задача 7.30. Опишите все неприводимые представления группы симметрий правильного n-угольника и вычислите их характеры.

Задача 7.31. Докажите, что неодномерный неприводимый характер не может быть всюду ненулевым.

3.3. Описание представлений с помощью характеров. Всякое представление W группы G однозначно с точностью до изоморфизма определяется набором кратностей, с которыми неприводимые представления V_ϱ входят в его разложение

$$W = \bigoplus_\varrho V_\varrho^{\oplus m_\varrho}$$

в прямую сумму неприводимых представлений. Согласно зад.7.26 характер такого представления

$$\chi_W = \sum_\varrho m_\varrho \chi_\varrho \ ,$$

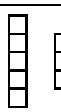
т. е. множество всех представлений группы G биективно соответствует линейным комбинациям неприводимых характеров с целыми неотрицательными коэффициентами. В силу ортонормальности неприводимых характеров, кратности m_ϱ неприводимх компонент равны скалярным произведениям:

$$(\chi_\lambda, \chi_W) = \sum_\varrho m_\varrho (\chi_\lambda, \chi_\varrho) = m_\lambda \ .$$

В частности, поскольку все m_ϱ целые, из равенства $(\chi_W, \chi_W) = \sum_\varrho m_\varrho^2$ вытекает, что представление W неприводимо тогда и только тогда, когда скалярный квадрат его характера равен единице.

Задача 7.32. Составьте таблицы неприводимых характеров для знакопеременных групп $\mathfrak{A}_4$ и $\mathfrak{A}_5$.

Указание: Группа $\mathfrak{A}_5$ имеет два трёхмерных неприводимых представления вращениями икосаэдра (отличающиеся внешним автоморфизмом $\mathfrak{A}_5$, который задаётся сопряжением любой транспозицией внутри $\mathfrak{S}_5$) и четырёхмерное представление вращениями симплекса. Полная таблица неприводимые характеров $\mathfrak{A}_5$ такова:

классы				(12345)	(21345)
число элементов	1	20	15	12	12
значения характеров:					
тривиальный	1	1	1	1	1
икосаэдр-1	3	0	-1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
икосаэдр-2	3	0	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
симплициальный	4	1	0	-1	-1
пятимерный	5	-1	1	0	0

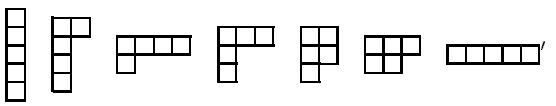
Задача 7.33. Вычислите скалярные квадраты характеров всех внешних степеней тавтологического представления $\mathfrak{S}_n$ и докажите, что все внешние степени симплициального представления неприводимы.

Указание: В стандартном базисе $\{e_I\}$ пространства $\Lambda^m(k^n)$ след перестановки σ равен $\sum\limits_I \{\sigma\}_I$, где

$$\{\sigma\}_I = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\sigma|_I) & , \text{ при } \sigma(I) \subset I \\ 0 & , \text{ при } \sigma(I) \not\subset I \end{cases} .$$

Это значение следует подставить в явную формулу для скалярного произведения и аккуратно вычислить возникающую сумму, имея в виду, что совокупность перестановок σ, для которых $\{\sigma\}_I\{\sigma\}_J \neq 0$, представляет собой прямое произведение симметрических групп, независимо переставляющих элементы в подмножествах $I \cap J$, $I \setminus (I \cap J)$, $J \setminus (I \cap J)$ и $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus (I \cup J)$.

Задача 7.34. Составьте таблицу неприводимых характеров симметрической группы $\mathfrak{S}_5$.
Указание: $\mathfrak{S}_5$ имеет знаковое одмерное представление α и симплициальное представление ϑ. Представления $\alpha \otimes \vartheta$ и $\Lambda^2\vartheta$ оказываются неприводимы, а $S^2\vartheta = \alpha \oplus \vartheta \oplus \zeta$, где ζ — неприводимое пятимерное представление. Ответ:

классы							
число элементов	1	10	30	20	15	20	24
значения характеров:							
тривиальный	1	1	1	1	1	1	1
знаковый α	1	-1	-1	1	1	-1	1
симплициальный ϑ	4	2	0	1	0	-1	-1
четырёхмерный $\vartheta \otimes \alpha$	4	-2	0	1	0	1	-1
шестимерный $\Lambda^2\vartheta$	6	0	0	0	-2	0	1
пятимерный $\zeta \subset S^2\vartheta$	5	1	-1	-1	1	1	0
пятимерный $\zeta \otimes \alpha$	5	-1	1	-1	1	-1	0

3.3.1. Утверждение. $\dim \operatorname{Hom}_G(U, W) = (\chi_U, \chi_W)$ *для любых представлений* U *и* V.

Доказательство. $\dim \operatorname{Hom}_G(U, W)$ равна кратности вхождения тривиального неприводимого представления в разложение $U^* \otimes W$, т. е. скалярному произведению тривиального характера $\chi_0 \equiv 1$ и характера $\chi_{U^*\otimes W}(g) = \chi_W(g)\chi_U(g^{-1})$:

$$\dim \operatorname{Hom}_G(U, W) = (\chi_{U^*\otimes W}, \chi_0) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_W(g)\chi_U(g^{-1}) \cdot 1 = (\chi_W, \chi_U) ,$$

что и утверждалось. □

Задача 7.35. Некто написал на гранях куба числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 и затем каждый день заменял одновременно на всех гранях старый номер на среднее арифметическое старых номеров четырёх соседних граней. С точностью до второго знака после запятой вычислите те числа, которые будут написаны на гранях через месяц.

Задача 7.36. Пусть V — двумерное неприводимое представление $\mathfrak{S}_3$.

а) Разложите $S^2(V)$ и $S^3(V)$ в сумму неприводимых представлений.

б) Докажите, что $S^{n+6}(V) = S^n(V) \oplus R$, где R - регулярное представление $\mathfrak{S}_3$.

в) Опишите разложение всех $S^n(V)$.

г) Опишите пространство $\mathfrak{S}_3$-инвариантных полиномов на V.

д) Докажите, что $S^2(S^3(V))$ G-изоморфно $S^3(S^2(V))$.

е) Вычислите характеры всех $V^{\otimes n}$ и разложите их на неприводимые.

ж) Верно ли, что $S^k(S^m(V))$ G-изоморфно $S^m(S^k(V))$ при любых k и m?

Задача 7.37. Для любого представления $G \xrightarrow{\varrho} GL(V)$ конечной группы G над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль рассмотрим пространство G-инвариантных однородных полиномов степени m на пространстве V:

$$\mathsf{Sym}^m_G(V) \stackrel{\text{def}}{=} \{\, f \in \mathsf{Sym}^m(V) \mid f(gv) = f(v) \quad \forall\, g \in G\ ,\ \ \forall\, v \in V \,\}$$

Докажите, что производящая функция для размерностей $d_m = \dim \mathsf{Sym}^m_G(V)$ имеет вид

$$\sum_{m \geqslant 0} d_m t^m = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(1 - t\,\varrho(g))} \qquad \text{(формула Молина)}\ .$$

Задача 7.38. Докажите, что все неприводимые представления конечной группы встречаются в разложениях тензорных степеней любого её эффективного представления.

3.4. Кольцо представлений. Рассмотрим решётку

$$\mathrm{Rep}\,(G) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\varrho \in \mathrm{Irr}(G)} \mathbb{Z}\,\chi_\varrho \subset k[G]\ ,$$

состоящую из целочисленных линейных комбинаций неприводимх характеров. $\mathrm{Rep}\,(G)$ является коммутативным подкольцом с единицей в коммутативной алгебре $k[G]$ всех функций (относительно операций поточечного сложения и умножения значений) и называется *кольцом представлений* группы G. Элементы G, равные суммам неприводимых характеров с неотрицательными коэффициентами взаимно однозначно соответствуют представлениям группы G. Остальные элементы $\mathrm{Rep}\,(G)$ называются *виртуальными представлениями*, поскольку интуитивно могут восприниматься как «представления», в разложении которых на неприводимые допускаются отрицательные кратности. Согласно зад.7.26, сложению и умножению точек $\mathrm{Rep}\,(G)$ отвечает прямая сумма и тензорное произедение представлений.

§4. Ограничение и индуцирование.

4.1. Левые и правые A-модули. Пусть A – произвольная ассоциативная алгебра над полем k. A-модули, с которыми мы имели дело до сих пор, по определению, задавались гомоморфизмом алгебр $A \xrightarrow{\lambda} \mathrm{End}(U)$. Аккуратные алгебраисты называют их *левами* A-модулями. Соответственно, *правыми* A-модулями называются антигомоморфизмы[7] алгебр $A \xrightarrow{\varrho} \mathrm{End}(V)$, удовлетворяющие соотношению:

$$\varrho(ab)v = \varrho(b)\varrho(a)v \qquad \forall\, a, b \in A\ ,\quad \forall\, v \in V\ .$$

[7] т. е. линейные операторы, переводящие произведения в произведения, у которых порядок сомножителей противоположен исходному

Действие A на правом A-модуле удобнее записывать правым умножением:

$$va \stackrel{\text{def}}{=} \varrho(a)v \ ,$$

поскольку при такой записи $v\,(ab) = (v\,a)\,b$.

4.2. Тензорное произведение над алгеброй. Если на пространстве U имеется структура правого, а на пространстве V — структура левого A-модуля, то фактор пространство тензорного произведения $U \otimes V$ по подпространству, порождённому всевозможными тензорами вида

$$(ua) \otimes v - u \otimes (av) \ , \quad a \in A \ , \ u \in U \ , \ v \in V$$

называется *тензорным произведением U и V над A* и обозначается $U \underset{A}{\otimes} V$. Подчеркнём, что на векторном пространстве $U \underset{A}{\otimes} V$ никакой структуры A-модуля, вообще говоря, уже нет.

4.2.1. Ограничение и индуцирование модулей. Пусть $S \subset A$ – ассоциативная подалгебра, и V – левый S-модуль. Рассмотрим A как *правый* S-модуль относительно правого умножения на элементы из S и образуем тензорное произведение $A \underset{S}{\otimes} V$. На нём имеется естественная структура левого A-модуля: $a\,(b \underset{S}{\otimes} v) \stackrel{\text{def}}{=} (ab) \underset{S}{\otimes} v$. Левый A-модуль $A \underset{S}{\otimes} V$ называется *индуцированным* с левого S-модуля V. Говорят также, что $A \underset{S}{\otimes} V$ получается из V *расширением* или *подъёмом скаляров*[8] от S до A. Таким образом, каждый левый S модуль индуцирует некий левый A-модуль.

Наоборот, каждый левый A-модуль W может очевидным образом рассматриваться как левый модуль над подалгеброй $S \subset A$. В таком контексте он обозначается W_S и называется модулем, полученным из W *ограничением* на S, или, как ещё говорят, *сужением* или *спуском скаляров*[9] с A до S. Операции ограничения и индуцирования сопряжены друг другу в следующем смысле.

4.2.2. Теорема. *Для любых A-модуля W и S-модуля U имеется канонический изоморфизм* $\mathrm{Hom}_A(A \underset{S}{\otimes} U, W) \simeq \mathrm{Hom}_S(U, W_S)$.

Доказательство. Сопоставим A-гомоморфизму $A \underset{S}{\otimes} U \xrightarrow{F} W$ оператор $U \xrightarrow{f} W_S$, заданный правилом $u \xmapsto{f} F(1 \underset{S}{\otimes} u)$. Он является S-гомоморфизмом, поскольку

$$f(su) = F(1 \underset{S}{\otimes} su) = F(s \underset{S}{\otimes} u) = F(s\,(1 \underset{S}{\otimes} u)) = s\,F(1 \underset{S}{\otimes} u) = s\,f(u) \ .$$

Наоборот, S-гомоморфизму $U \xrightarrow{\varphi} W_S$ сопоставим линейный оператор $A \otimes U \xrightarrow{\tilde{\Phi}} W$, действующий на разложимые тензоры по правилу $a \otimes u \xmapsto{\tilde{\Phi}} a\varphi(u)$. Поскольку

$$\Phi((as) \otimes u - a \otimes (su)) = \Phi((as) \otimes v) - \Phi(a \otimes (su)) = as\varphi(u) - a\varphi(su) = 0 \ ,$$

[8] название связано с тем, что простейшим примером этой конструкции является комплексификация вещественного векторного пространства V, представляющая собой не что иное как $\mathbb{C} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} V$.

[9] название связано с тем, что простейшим примером этой конструкции является овеществление комплексного векторного пространства W, представляющее собой не что иное как $W_{\mathbb{R}}$.

он корректно факторизуется до линейного оператора $A \underset{S}{\otimes} U \xrightarrow{\Phi} W$, который является A-гомоморфизмом, поскольку

$$\Phi(a\,(b \underset{S}{\otimes} u)) = \Phi((ab) \underset{S}{\otimes} u) = ab\varphi(u) = a\Phi(b \underset{S}{\otimes} u)\ .$$

Сопоставления $F \longmapsto f$ и $\varphi \longmapsto \Phi$ суть взаимно обратные линейные операторы между пространствами $\mathrm{Hom}_A(A \underset{S}{\otimes} U, W)$ и $\mathrm{Hom}_S(U, W_S)$. □

Задача 7.39. Докажите, что ограничение и индуцирование перестановочны с прямыми суммами и с тензорными произведениями.

4.3. Ограниение и индуцирование представлений. В ситуации, когда $H \subset G$ — подгруппа конечной группы, предыдущие конструкции сопоставляют каждому линейному представлению группы $G \xrightarrow{\varrho} GL(V)$ его *ограничение*

$$\mathrm{Res}^G_H V\ :\ H \xrightarrow{\mathrm{Res}^G_H \varrho} GL(V)$$

на подгруппу H, а каждому линейному представлению подгруппы $H \xrightarrow{\lambda} GL(U)$ — *индуцированное* представление

$$\mathrm{Ind}^G_H U\ :\ G \xrightarrow{\mathrm{Ind}^G_H \lambda} GL(k[G] \underset{k[H]}{\otimes} U)$$

группы G, так что иммет место канонический изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}^G_H U, V) \simeq \mathrm{Hom}_H(U, \mathrm{Res}^G_H V)\ ,$$

известный в этом контнексте как *двойственность Фробениуса*. На языке характеров сопряжение и индуцирование являются встречными гомоморфизмами колец представлений

$$\mathrm{Rep}\,(H) \underset{\mathrm{Res}^G_H}{\overset{\mathrm{Ind}^G_H}{\rightleftarrows}} \mathrm{Rep}\,(G)\ ,$$

сопряжёнными относительно канонического скалярного произведения на групповой алгебре:

$$(\mathrm{Ind}^G_H U, V)_{k[G]} = (U, \mathrm{Res}^G_H V)_{k[H]} \qquad \forall\, U \in \mathrm{Rep}\,(H)\ ,\quad \forall\, V \in \mathrm{Rep}\,(G)\ .$$

В частности, неприводимый G-модуль V входит в разложение представления, индуцированного с неприводимого H-модуля U столько же раз, сколько неприводимый H-модуль U входит в разложение ограничения неприводимого G-модуля V на подгруппу H.

4.4. Структура индуцированного представления. Векторное пространство $k[G] \otimes U$ представляет собой прямую сумму

$$k[G] \otimes U = \bigoplus_{g \in G} g \otimes U\ .$$

При факторизации по соотношениям $(gh) \otimes u = g \otimes (hu)$ все прямые слагаемые $g \otimes U$, у которых g лежат в одном смежном классе gH по подгруппе H, склеятся в одно пространство,

изоморфное U, причём склейка эта задаётся действием H на U: $gh \otimes u \leftrightsquigarrow hu$. Таким образом, зафиксировав ситему представителей $\{g_1, g_2, \dots, g_s\}$ классов смежности G/H, мы можем написать следующее разложение в прямую сумму векторных пространств

$$k[G] \underset{k[H]}{\oplus} U = g_1U \oplus g_2U \oplus g_3U \oplus \ \cdots \ \oplus g_sU \ ,$$

в котором каждое $g_\nu U$ представляет собой копию пространства U, а приписанный слева значёк g_ν призван показывать, что эта копия соответствует смежному классу $g_\nu H \subset G$. Если условиться писать $g_\nu(u)$ для обозначения вектора $u \in U$, лежащего в γ_ν-той копии $g_\nu U$ пространства U, то векторы $w \in k[G] \underset{k[H]}{\otimes} U$ будут однозначно представляться суммаи вида

$$\sum_{\nu=1}^{s} g_\nu(u_\nu) \ .$$

с $u_\nu \in U$. В группе G левое умножение на элемент $g \in G$ осуществляет перестановку смежных классов: для любого $g \in G$ и любого $1 \leqslant \nu \leqslant s$ существуют единственные $h_{g,\nu} \in H$ и $1 \leqslant \mu_{g,\nu} \leqslant s$, такие что $g\, g_\nu = g_{\mu_{g,\nu}} h_{g,\nu}$. В этих обозначениях действие элементов $g \in G$ на $\underset{\nu}{\oplus} g_\nu U$ происходит по правилу

$$g \sum_{\nu=1}^{s} g_\nu(u_\nu) = \sum_{\nu=1}^{s} g_{\mu_{g,\nu}}(h_{g,\nu} u_\nu) \ ,$$

где $h_{g,\nu}u_\nu \in U$ вычисляются в соответствии с действием H на U.

Задача 7.40. Опишите представления $\mathfrak{S}_3$, индуцированные с одномерных представлений подгруппы $\mathfrak{S}_2 \subset \mathfrak{S}_3$, переставляющей первые два символа.

Задача 7.41. Докажите, что индуцированное представление можно описать как пространство

$$\mathrm{Hom}_H(k[G], U) = \{\, G \xrightarrow{f} U \mid f(hg) = hf(g) \quad \forall\, h \in H \ , \quad \forall\, g \in G \,\} \ ,$$

на котором G действует по правилу $f(x) \overset{g}{\longmapsto} gf(x) = f(xg)$.

Задача 7.42. Докажите, что на данном классе сопряжённых элементов $C \subset G$ характер представления, индуцированного тривиальным одномерным представлением любой подгруппы $H \subset G$, принимает значение

$$\chi_{\mathrm{Ind}_H^G \mathrm{Id}}(C) = \frac{[G:H]}{|C|} \cdot |C \cap H| \ .$$

Задача 7.43. Пусть пересечение класса сопряжённых элементов $C \subset G$ с подгруппой $H \subset G$ раскладывается в объединение m классов H-сопряжённости

$$C \cap H = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_m$$

Докажите, что характер произвольного индуцированного представления $\mathrm{Ind}_H^G U$ принимает на C значение

$$\chi_{\mathrm{Ind}_H^G U}(C) = \frac{|G|}{|H|} \sum_{i=1}^{m} \frac{|D_i|}{|C|} \chi_U(D_i) \ .$$

Задача 7.44. Опишите представления $\mathfrak{S}_4$, индуцированные с

а) двумерного неприводимого представления $\mathfrak{S}_3 \subset \mathfrak{S}_4$;

б) одномерного представления циклической подгруппы четвёртого порядка, в котором образующая этой подгруппы действует умножением на $\sqrt{-1}$

в) одномерного представления циклической подгруппы третьего порядка, в котором образующая этой подгруппы действует умножением на примитивный $\sqrt[3]{1}$

Задача 7.45. Опишите представления $\mathfrak{S}_5$, индуцированные со всех неприводимых представлений знакопеременной подгруппы.