# Домашний письменный экзамен[1] ПО АЛГЕБРЕ за третий семестр

**Задача 1. («формула Тейлора»)** Докажите, что для любого многочлена[2] $f$ на векторном пространстве $V$ над полем $k$ характеристики нуль имеет место формула

$$f(v+w) = \sum_{\nu=0}^{\deg f} \frac{\partial^\nu f}{\partial w^\nu}(v).$$

**Задача 2. («норм-кривые»)** Докажите, что через любые $n+3$ точки линейно общего положения в $\mathbb{CP}_n$ проходит единственная кривая Веронезе[3]

**Задача 3. («специальный квадратичный комплекс прямых»)** Как изобразится на квадрике Плюккера в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^4)$ множество всех прямых в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$, которые **а)** лежат **б)** касаются данной невырожденной квадрики $Q \subset \mathbb{P}_3$?

**Задача 4. («дикая группа»)** Верно ли, что все конечномерные комплексные представления группы $SL_2(\mathbb{Z})$ вполне приводимы?

**Задача 5. («инвариантный флаг»)** Пусть некая подгруппа $G \subset GL(V)$ состоит только из унипотентных[4] операторов. Покажите, что

**а)** если $V$ неприводимо над $G$, то $\dim \leqslant 1$;

**б)** все операторы из $G$ в подходящем базисе могут быть одновременно записаны верхнетреугольными матрицами с единицей по главной диагонали.

**Задача 6. («не-не-не»)** Верно ли, что неодномерный неприводимый комплексный характер произвольной конечной группы не может нигде не обращаться в нуль?

**Задача 7. («разложения тензорных степеней»)** Пусть $G \subset \mathrm{GL}(V)$ – некоторая конечная подгруппа (основное поле алгебраически замкнуто). Верно ли, что в разложениях тензорных степеней $V^{\otimes n}$ встречаются все неприодимые представления группы $G$?

**Задача 8. («конструкция Шура»)** Докажите, что для всех $0 \leqslant k \leqslant (n-1)$ $k$-тая внешняя степень стандртного $(n-1)$-мерного представления симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ симметриями правильного симплекса изоморфна представлению Шура[5], построенному по Г-образной диаграмме Юнга высоты $(k+1)$ (т. е. по разбиению $\lambda = (\,(n-k)\,,\underbrace{1\,,1\,,\,\dots\,,1\,,1}_{k})$).

---

[1] Письменный домашний экзамен является, наряду с очным письменным экзаменом, официальным способом получить отметку по курсу алгебры за третий семестр. В экзамене могут принять участие все желающие. Для этого необходимо в пятницу, 18 декабря 1998 года $17^{30}$ *лично прийти* в в МК НМУ, имея при себе *письменное решение* задач из предлагаемого ниже списка. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Для получения оценки «отлично» достаточно набрать не менее 55 баллов, для получения оценки «хорошо» — не менее 40 баллов, для получения оценки «удовлетворительно» — не менее 25 баллов.

[2] функция $V \xrightarrow{f} k$ называется *многочленом*, если в некотором базисе значение $f(v)$ является многочленом от координат вектора $v$

[3] кривая $C \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$ называется *кривой Веронезе*, если имеется линейный изоморфизм $\mathbb{C}^{n+1} \simeq S^n(\mathbb{C}^2)$, который отождествляет $C$ с образом вложения Веронезе $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \hookrightarrow \mathbb{P}(S^n\mathbb{C}^2)\,:\,v \longmapsto v^{\otimes n}$.

[4] линейный оператор $V \xrightarrow{F} V$ называется *унипотентным*, если разность $F - \mathrm{Id}_V$ нильпотентна

[5] в групповой алгебре $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ рассматривается левый идеал $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\cdot c_\lambda$, порождённый элементом

$$c_\lambda = a_\lambda b_\lambda = (\sum p)\,(\sum \mathrm{sgn}(q)\,q) \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\;,$$

где $p$ пробегает все перестановки, переставляющие номера внутри строк, а $q$ — все перестановки, переставляющие номера внутри столбцов некоторой диаграммы Юнга $\lambda$, в клетки которой произвольным образом расставлены числа от 1 до $n$; *представление Шура* – это ограничение левого регулярного представления $\mathfrak{S}_n$ на этот левый идеал