Фейгин Б. Л.

**Анализ на многообразиях**

Второй курс. Осень 1998

# Лекция 1

Обычный математический анализ имеет дело с функциями на $\mathbb{R}^n$. Эти функции интегрируют, дифференцируют, решают дифференциальные уравнения, и т. д. Анализ на многообразиях — это более или менее то же самое, но мы заменяем $\mathbb{R}^n$ на произвольное многообразие $M$. Какое-то время анализ на многообразиях будет просто упражнением, как сформулировать утверждения из обычного математического анализа, чтобы они годились для произвольных многообразий. Сначала я буду объяснять более или менее стандартные вещи — многообразия, векторные поля на них, дифференциальные формы, интегрирование, и т. д.

Что предполагается известным? То, что уже было на первом курсе. Определение многообразия предполагается известным, но всё же я начну с некоторых напоминаний. По большей части для того, чтобы просто зафиксировать терминологию.

1) Просто *многообразие*, или более точно *многообразие класса* $C^0$, или, как еще иногда говорят, *топологическое многообразие*, — это достаточно хорошее топологическое пространство $X$, обладающее следующим свойством:

- для любой точки $x \in X$ существует окрестность $U_x$, гомеоморфная шару в $\mathbb{R}^n$ (в таком случае многообразие называют $n$-*мерным*).

Разумеется, нас очень сильно будет интересовать геометрия многообразия $X$, но для анализа основной объект — функции на $X$. Алгебру непрерывных функций на $X$ мы будем обозначать $C(X)$; иногда используется обозначение $C^0(X)$.

2) *Гладкое многообразие* — это, во-первых, просто многообразие $X$. Во-вторых, в алгебре $C(X)$ зафиксировано подкольцо $C^\infty(X)$ — алгебра бесконечно дифференцируемых функций. В обозначении участвует $\infty$, потому что можно рассматривать и функции, дифференцируемые конечное число раз.

## Свойства подкольца $C^\infty(X)$

1) Пусть $f_1, \dots, f_m \in C^\infty(X)$ и $u(x_1, \dots, x_m)$ — функция от $\{x_j\}$, $x_j \in \mathbb{R}$ (т.е. $u$ — функция на $\mathbb{R}^m$) класса $C^\infty$. Тогда $u(f_1, \dots, f_m) \in C^\infty(X)$.

Это означает, что от функций из $C^\infty(X)$ можно вычислять гладкие функции, и они снова должны быть гладкими функциями.

2) Для любой точки $x \in X$ существует окрестность $U_x$ и существуют $n$ функций $g_1, \dots, g_n$ на $U_x$, обладающие следующим свойством: ограничение любой функции $f \in C^\infty(X)$ на $U_x$ имеет вид $v(g_1, \dots, g_n)$, где $v$ — функция класса $C^\infty$.

Достаточно ли этих свойств, чтобы обязательно получить в результате гладкое многообразие? Вообще говоря, нет. Например, в качестве $C^\infty(X)$ можно взять только константы. Но если $C^\infty(X)$ разделяет точки (т.е. для любых двух точек существует функция из $C^\infty(X)$, которая в этих точках принимает разные значения), то этих свойств достаточно, т.е. задание подкольца $C^\infty(X)$ эквивалентно заданию структуры многообразия.

В обычном определении, когда многообразие задано посредством атласа, функция на многообразии называется бесконечно дифференцируемой, если она бесконечно дифференцируема в любой карте в тех координатах, которые там есть.

О негладких многообразиях мы будем говорить очень редко. Поэтому, если я говорю «многообразие», то оно по умолчанию гладкое.

Определение. *Пусть $X$ и $Y$ — многообразия. Гладкое отображение, или морфизм гладких многообразий, — это такое непрерывное отображение $\varphi : X \to Y$, что если $f \in C^\infty(Y)$, то $\varphi^*(f) \in C^\infty(X)$. (Здесь $\varphi^*(f)(x) = f(\varphi(x))$.)*

Два многообразия $X$ и $Y$ *изоморфны*, если существует гладкий изоморфизм топологических пространств $X \to Y$. (В этом случае достаточно потребовать гладкости отображения в одну сторону.)

Возникает такой вопрос. Возьмем какое-нибудь топологическое пространство, например, двумерную сферу $S^2$. Задать на $S^2$ структуру гладкого многообразия — это значит задать в $C(S^2)$ подкольцо $C^\infty(S^2)$. Какими разными способами это можно сделать? Для $S^1$ совсем несложно показать, что это можно сделать только одним способом. Для $S^2$ это тоже просто. Дальше это становится сложнее, а для $S^7$ уже неверно: на $S^7$ определить, что такое дифференцируемые функции, можно 28 различными способами. Это не очень сложно. Сферу можно склеить из двух дисков. А можно придумать и принципиально другой способ склейки.

На компактном топологическом многообразии имеется лишь конечное число гладких структур — это доказано. Но найти их все трудно. Алгоритмически это возможно, но практически сложно.

На $X_1 \times X_2$ очень просто задается структура многообразия. Это было, и этим мы будем пользоваться.

Итак, имеется многообразие $X$ и алгебра $C^\infty(X)$. С многообразием $X$ связана очень важная группа — группа диффеоморфизмов, которую мы будем обозначать $D(X)$. Элементы этой группы — это изоморфизмы $X$ с собой, т.е. взаимно однозначные гладкие отображения из $X$ в себя. Я уже упоминал, что в таком случае обратное отображение тоже гладкое.

Кольцо $C^\infty(X)$ — это представление группы $D(X)$.

## Инфинитезимальный диффеоморфизм, или векторное поле

Если $d \in D(X)$, т.е. $d : X \to X$, то тогда $d^* : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$. (Эта формула и задает представление группы диффеоморфизмов.)

Пусть имеется семейство диффеоморфизмов

$$\Theta : X \times (-1, 1) \to X.$$

Предполагается, что отображение $\Theta$ гладкое. Кроме того, при $-1 < \varepsilon < 1$ можно рассмотреть отображение $\Theta_\varepsilon : X \to X$. Предполагается, что это отображение — диффеоморфизм. Нас будут интересовать такие семейства, что $\Theta_0 = \mathrm{id}$ — тождественный диффеоморфизм (оставляет все точки на месте).

Неформально говоря, мы хотим представить диффеоморфизмы этого семейства в виде $\Theta_0 + \varepsilon\Theta'$, где $\Theta'$ и есть инфинитезимальный диффеоморфизм. Только как это точно сказать? Буквально, написанное равенство смысла не имеет. Но давайте рассмотрим преобразование $\Theta_\varepsilon^* : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$. Получаем отображение $(-1,1) \to \mathrm{Hom}(C^\infty(X), C^\infty(X))$. Из наших предположений следует, что

$$\Theta_\varepsilon^* = \mathrm{id} + \varepsilon \left.\frac{\partial\Theta_\varepsilon^*}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} + \cdots$$

Величину $L = \left.\dfrac{\partial\Theta_\varepsilon^*}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$ и называют *инфинитезимальным диффеоморфизмом.*

Пусть $d \in D(X)$. Тогда $d^* : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$ — линейное отображение и гомоморфизм алгебры, т.е.

$$d^*(fg) = d^*(f)d^*(g).$$

Воспользовавшись этим, получим:

$$\Theta_\varepsilon^*(f \cdot g) = f \cdot g + \varepsilon(L(f)g + fL(g)) + \cdots$$

Это свойство, которое называют *правилом Лейбница*, обычно берется за определение.

Определение. *Векторное поле, или инфинитезимальный диффеоморфизм, или дифференцирование, это такое линейное отображение $L : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$, что*

$$L(fg) = L(f)g + fL(g).$$

Простейший пример — $X = \mathbb{R}$. Возьмем $L = u(x)\frac{\partial}{\partial x}$. Иначе говоря, $L(f) = u(x)f'$. Это — преобразование $C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$. Почему любое такое преобразование, удовлетворяющее свойству $L(fg) = L(f)g + fL(g)$, имеет такой вид?

Если бы мы рассматривали не бесконечно дифференцируемые функции, а многочлены, то это было бы очевидно. Действительно, если есть преобразование $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, удовлетворяющее правилу Лейбница, то $1 \mapsto 0$. Если $x \mapsto u(x)$, то образы $x^2, x^3, \ldots$ определены однозначно. Буквально применить такое рассуждение нельзя, потому что не любая бесконечно дифференцируемая функция — многочлен. Тем не менее, доказать это можно с помощью следующего вспомогательного утверждения.

Лемма. *Пусть $L : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ — дифференцирование. Пусть, далее, $p \in \mathbb{R}$, $f(p) = 0$ и $f'(p) = 0$. Тогда $L(f)(p) = 0$.*

Основой для доказательства этой леммы служит лемма Адамара.

Лемма (Адамар). *Рассмотрим в алгебре $C^\infty(\mathbb{R})$ идеал $J_p$, состоящий из функций, обращающихся в нуль в точке $p$. Образуем чисто в алгебраическом смысле $J_p^2$ — квадрат идеала $J_p$, т.е. идеал, порожденный произведениями. Тогда*

$$J_p^2 = \{f \mid f(p) = 0 \text{ и } f'(p) = 0\}.$$

Иначе говоря, если $g(x) = c_2(x-p)^2 + c_3(x-p)^3 + \cdots$, то $g = \sum \mu_i \hat{\mu}_i$, где $\mu_i(p) = \hat{\mu}_i(p) = 0$ (сумма конечная).

Это утверждение не очень сложное, но для бесконечно дифференцируемых функций содержательное. Для многочленов оно очевидно.

Лемма теперь с легкостью доказывается. Действительно, если $f(p) = 0$ и $f'(p) = 0$, то $f = \sum \mu_i \hat{\mu}_i$, где $\mu_i(p) = \hat{\mu}_i(p) = 0$. Поэтому из правила Лейбница следует, что $L(f)(p) = 0$.

Теперь запишем $f$ в виде $f(x) = f(p) + (x-p)f'(p) + f_2$, где $f_2(p) = f_2'(p) = 0$. Тогда $L(f)(p) = L(x)f'(p)$, где $L(x)$ — значение оператора $L$ на функции $x$. Равенство $L(f)(p) = L(x)f'(p)$ выполняется для любой точки $p$. Таким образом, оператор $L$ имеет требуемый вид $L(f) = u(x)f'$, где $u(x) = L(x)$.

Если лемму Адамара для $\mathbb{R}^n$ применить точно так же, то получим, что любое дифференцирование $L : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеет вид $L = \sum u_i \frac{\partial}{\partial x-i}$, т.е. $L(f) = \sum u_i \frac{\partial f}{\partial x-i}$.

Упражнение. *Пусть на прямой задано семейство диффеоморфизмов $d_\varepsilon(x) = x\exp(\varepsilon)$. Какой для этого семейства получится инфинитезимальный диффеоморфизм? (Ответ: $x\frac{\partial}{\partial x}$.)*

Оправдаем теперь название *векторное поле*. Векторное поле на плоскости $\mathbb{R}^2$ в обычном смысле — это когда в каждой точке плоскости задан вектор $\{v_1(x,y), v_2(x,y)\}$. Этому вектору нужно сопоставить дифференцирование $L : C^\infty(\mathbb{R}^2) \to C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Это делается так:

$$L = v_1(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + v_2(x,y)\frac{\partial}{\partial y},$$

т.е. $L(f) = v_1 f_x' + v_2 f_y'$.

Вернемся к случаю прямой. Мы берем семейство диффеоморфизмов $d_\varepsilon$ и вычисляем производную при $\varepsilon = 0$. Чтобы получить $x\frac{\partial}{\partial x}$, можно взять $d_\varepsilon(x) = x\exp(\varepsilon)$. Что нужно сделать, чтобы получить $x^2\frac{\partial}{\partial x}$. Это, конечно, не однозначно. Вопрос — всё ли можно получить?

Можно взять $d(\varepsilon, x) = x + \varepsilon x^2 + \cdots$. При этом для $-1 < \varepsilon < 1$ должен быть диффеоморфизм. Это ограничение не очень сильное, но всё-таки ограничение. Отображение $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ будет диффеоморфизмом, если $v'(x) > 0$.

Любое векторное поле $\sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ получается из некоторого семейства дифеоморфизмов. И наоборот, любому семейству диффеоморфизмов соответствует некоторое векторное поле.