Фейгин Б. Л.

Анализ на многообразиях

Второй курс. Осень 1998

1. Лекция 10

1.1. Комплекс де Рама

В простейшем случае, в $\mathbb{C}^n$ и с полиномиальными коэффициентами, комплекс де Рама устроен так. Рассмотрим алгебру $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_n]$ — многочлены по переменным x и грассманова алгебра по переменным ξ (точное определение было на прошлой лекции). Стандартная запись элемента этой алгебры:

$$\sum f_{i_1\dots i_s}\xi_{i_1}\wedge\xi_{i_2}\wedge\dots\wedge\xi_{i_s}=\omega.$$

Здесь $f_{i_1\dots i_s}$ — многочлен.

1.2. Дифференциальное исчисление на алгебре $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_n]$

Определены дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_j}$. Ещё есть дифференцирования $\frac{\partial}{\partial \xi_i}$, которые определяются следующим образом. На x эти дифференцирования не обращаю внимание. А правило дифференцирования ξ такое:

$$\frac{\partial}{\partial\xi_i}(\xi_{i_1}\wedge\xi_{i_2}\wedge\dots\wedge\xi_{i_s})=0,$$

если $i\notin\{i_1\dots i_s\}$. Если же элемент ξ_i входит в произведение, то его нужно переставить на первое место: $\pm\xi_i\wedge\cdots$, а потом ξ_i нужно стереть.

Очевидно, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\omega_1\wedge\omega_2)=\frac{\partial}{\partial x_i}\omega_1\wedge\omega_2+\omega_1\wedge\omega_2\frac{\partial}{\partial x_i}\omega_2.$$

Для $\frac{\partial}{\partial\xi_i}$ выполняется более сложная формула:

$$\frac{\partial}{\partial\xi_i}(\omega_1\wedge\omega_2)=\frac{\partial}{\partial\xi_i}\omega_1\wedge\omega_2\pm\omega_1\wedge\omega_2\frac{\partial}{\partial\xi_i}\omega_2.$$

Здесь ставится знак $+$, если форма ω_1 чётна, и знак $-$, если форма ω_1 нечётна.

Дифференциал де Рама на алгебре $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_n]$ — это оператор $d=\sum\xi_i\frac{\partial}{\partial x_i}$. Ясно, что

$$\sum\xi_i\frac{\partial}{\partial x_i}f\xi_{i_1}\wedge\xi_{i_2}\wedge\dots\wedge\xi_{i_s}=\sum\frac{\partial f}{\partial x_i}\xi_i\wedge\xi_{i_1}\wedge\xi_{i_2}\wedge\dots\wedge\xi_{i_s}.$$

Дифференциал де Рама — это нечётное дифференцирование:

$$d(\omega_1\wedge\omega_2)=d\omega_1\wedge\omega_2\pm\omega_1\wedge d\omega_2.$$

Легко проверяется свойство $d^2=0$. Действительно,

$$\sum_j\xi_j\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_i\xi_i\frac{\partial}{\partial x_i}U\right)=\sum_{i,j}\xi_i\wedge\xi_j\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}U.$$

В результате получаем 0, так как выражение $\xi_i\wedge\xi_j$ кососимметрично по i и j, а выражение $\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}U$ симметрично.

При доказательстве равенства $d^2 = 0$ использовалось только то, что $d = \sum_i \rho_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, где все $\rho_i \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ нечётны, т.е. они антикоммутируют друг с другом. Для операторов d такого вида тоже выполняется равенство $d^2 = 0$.

Получился комплекс

$$0 \to \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n \to 0.$$

Этот комплекс является частным случаем комплекса де Рама. Элементы Ω^0 — это функции f. Элементы Ω^1 имеют вид $\sum f_i \xi_i$.

Обычно элемент $d(x_i) = \xi_i$ обозначают dx_i, но мы пока не будем использовать такие обозначения.

1.3. Вычисление когомологий комплекса

Легко проверить, что ядро оператора d в члене Ω^0 — это константы. Действительно, $df = \sum \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Поэтому если $df = 0$, то $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, а значит, $f = \mathrm{const}$.

Утверждение (Лемма Пуанкаре). *В члене* Ω^i, $i > 0$, $\operatorname{Ker} d / \operatorname{Im} d = 0$.

На алгебре $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ действует оператор $d = \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Построим оператор, действующий в обратную сторону; этот оператор играет роль гомотопии. А именно, рассмотрим оператор $\delta = \sum x_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$. Можно доказать, что $\delta^2 = 0$, хотя и это нам не понадобится. Доказательство основано на том, что

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_j} f = -\frac{\partial}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial \xi_i} f.$$

То же самое рассуждение годится и для оператора $\sum p_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$, где все p_i чётные; такой оператор называют дифференциалом в комплексе Кошуля.

Рассмотрим антикоммутатор $d\delta + \delta d$. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} d\delta U &= \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} U + \text{ещё один член} \\ \delta d U &= \sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i} U - \text{тот же самый член}. \end{aligned}$$

Поэтому $d\delta + \delta d = \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} + \sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = E$ — эйлерово векторное поле. Назовём элемент $\omega \in \Omega^i$ однородным степени m, если $E\omega = m\omega$. Например, если $f \in \Omega^0$, то f — однородный многочлен степени m тогда и только тогда, когда $Ef = mf$. Если $\omega = \sum P_i \xi_i \in \Omega^1$ и все многочлены P_i имеют степень $m-1$, то $E\omega = f\omega$. В общем случае, если $\omega = \sum P_{i_1 \ldots i_\alpha} \xi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi_{i_\alpha} \in \Omega^1$, то степень однородности элемента ω равна m, если все $P_{i_1 \ldots i_\alpha}$ — однородные многочлены степени $m - \alpha$.

То же самое можно сказать короче. На алгебре $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ есть общая степень по x и ξ. Оператор d сохраняет эту степень. Таким образом, получаем разложение на однородные составляющие:

$$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n] = \oplus_m (\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n])^m.$$

Если ω имеет степень m, то $d\omega$ тоже имеет степень m.

Итак, пусть $\omega \in \Omega^i$, $i > 0$, и $d\omega = 0$. Тогда $\omega = d\nu$. Это и есть утверждение о том, что $\operatorname{Ker} d = \operatorname{Im} d$. Нужно найти ν. Для этого запишем ω в виде $\omega = \sum \omega^{(\beta)}$, где $\omega^{(\beta)}$ имеет степень однородности β. Отображение d сохраняет степень однородности, поэтому из равенства $d\omega = 0$ следует равенство $d\omega^{(\beta)} = 0$. С другой стороны, $d\delta\omega^{(\beta)} = (E - \delta d)\omega^{(\beta)} = \beta\omega^{(\beta)}$. Это означает, что $\omega^{(\beta)} = d(\delta\omega^{(\beta)}/\beta)$. При этом нужно, чтобы число β было больше 0. Но в Ω^i, где $i > 0$, нет элементов степени однородности 0. Таким образом, $\nu = \sum(\delta\omega^{(\beta)}/\beta)$ — искомый элемент.

1.4. Комплекс де Рама на $\mathbb{R}^n$

Элементы комплекса де Рама на $\mathbb{R}^n$ — это функции $f(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, гладкие по $x_1, \ldots, x_n$. Любой элемент комплекса де Рама на $\mathbb{R}^n$ имеет вид

$$\sum f_{i_1\ldots i_s}\xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_s},$$

где $f_{i_1\ldots i_s}$ — гладкая функция. Дифференциал де Рама снова имеет вид $d = \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Равенство $d^2 = 0$ тоже выполняется.

Сама лемма Пуанкаре тоже сохраняется: пусть $\omega \in \Omega^i$, $i > 0$, и $d\omega = 0$; тогда $\omega = d\nu$. Но прежнее доказательство не проходит: гладкую функцию нельзя разложить в сумму однородных многочленов. Но кое-что сохраняется. Дифференциал δ снова задаётся формулой $\delta = \sum x_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$. Оператор E задаётся той же самой формулой $E = d\delta + \delta d$.

Для функции $P(x)$ можно определить последовательность операций

$$P(x) \to \frac{P(x)}{x} \to \int_0^x \frac{P(t)}{t} dt.$$

Для многочленов это даёт $x^i \to x^i/i$, что и нужно.

В общем случае нужно построить оператор L, обладающий следующими свойствами. Пусть $\omega \in \Omega^i$, $i > 0$, и $d\omega = 0$. Тогда $dL(\delta\omega) = \omega$. Если такой оператор L построен, то лемма Пуанкаре доказана. На этом мы пока остановимся.

1.5. Действие алгебры Ли векторных полей на $\mathbb{C}^n$ на пространстве дифференциальных форм

Оператор $\frac{\partial}{\partial x_i}$ не коммутирует с d. Займёмся построением операторов на $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$, коммутирующих с d.

Рассмотрим оператор π, который переводит $l = \sum P_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ в

$$\pi(l) = \sum P_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum (dP_i) \frac{\partial}{\partial \xi_i}.$$

Предложение. *а) Оператор π коммутирует с d.*

б) $\pi([l_1, l_2]) = [\pi(l_1), \pi(l_2)]$.

в) Введём на Ω оператор $\sum P_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$. Тогда справедливо тождество

$$(\sum P_i \frac{\partial}{\partial \xi_i})d + d(\sum P_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}) = \pi(l) = \pi(l) = \sum P_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum (dP_i) \frac{\partial}{\partial \xi_i}.$$

Значение этой теоремы такое: алгебра Ли векторных полей на $\mathbb{C}^n$ действует на пространстве дифференциальных форм. Более подробно это мы обсудим в следующий раз.

1.6. Комплекс де Рама на многообразии M

Комплекс де Рама строился аксиоматически: $\Omega^0 = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, есть дифференциал d. Предполагается, что $d(x_i) = \xi_i$ и $d(fg) = df \cdot g + f \cdot dg$. На основании этих свойств строится весь комплекс де Рама на $\mathbb{R}^n$.

Комплекс де Рама на многообразии M можно строить точно так же. Здесь $\Omega^0 = C^\infty(M)$; есть элементы $g df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge f_k$, которые можно перемножать. Выполняется свойство $df \wedge dg = -dg \wedge df$. Основное условие такое: $d(fg) = df \cdot g + f \cdot dg$. Кроме того, предполагается, что $d^2 = 0$. После этого развивается арифметика этих символов. Нужно написать все такие символы и профакторизовать по соотношениям $d(fg) - df \cdot g - f \cdot dg = 0$ и $d^2 f = 0$. Тогда получится комплекс де Рама. Когомологии соответствующего комплекса де Рама совпадают с обычными когомологиями многообразия.