Фейгин Б. Л.
Анализ на многообразиях
Второй курс. Осень 1998

1. Лекция 11

Начнём с напоминания двух определений комплекса де Рама, которые у нас были. Мы обсудим, как они связаны.

Определение комплекса де Рама было фактически дано в следующей общности. Пусть A — коммутативная алгебра. (Основные примеры: $A = C(M)$ — кольцо гладких функций и $A = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$.) Комплекс де Рама это, во-первых, $\mathbb{Z}$-градуированная алгебра

$$\Omega^* = \Omega^0 \oplus \Omega^1 \oplus \Omega^2 \oplus \cdots$$

Если $\omega_1 \in \Omega^i$ и $\omega_2 \in \Omega^j$, то $\omega_1\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega^{i+j}$. Эта алгебра $\mathbb{Z}_2$-коммутативна, т.е. если $\omega_1 \in \Omega^i$ и $\omega_2 \in \Omega^j$, то $\omega_1 \wedge \omega_2 = \pm\omega_2 \wedge \omega_1$; здесь знак $-$ берётся в том случае, когда оба числа i и j нечётны, а во всех остальных случаях берётся знак $+$.

Имеется дифференциал $d : \Omega^* \to \Omega^*$, точнее, $\Omega^i \to \Omega^{i+1}$. Этот дифференциал обладает свойством $d^2 = 0$ и $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 \pm \omega_1 \wedge d\omega_2$, где знак $-$ берётся в том случае, когда ω_2 нечётно, т.е. $\omega_2 \in \Omega^j$, j нечётно.

При этом условия такие: $\Omega^0 \cong A$ и Ω^* — пространство, порождённое элементами $f_0 df_1 \wedge \cdots \wedge f_m$, $f_i \in A$ и отфакторизованное по идеалу J.

Поясним, что это означает и как устроен идеал J.

По коммутативной алгебре A можно построить градуированную кососкоммутативную алгебру. В градуировке 0 лежит сама алгебра A; элементы градуировки 0 будем обозначать a. В градуировке 1 есть ещё одна копия A. Элементы градуировки 1 будем обозначать da. Экземпляр алгебры A в градуировке 1 будем обозначать $A^{(1)}$. Рассмотрим грассманову алгебру $\Lambda^*(A^{(1)})$ (для любого векторного пространства V, в том числе и бесконечномерного, можно рассмотреть грассманову алгебру $\Lambda^* V$). Рассмотрим, далее, алгебру

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes \Lambda^*(A^{(1)}) & = & A & \oplus A \otimes A^{(1)} & \oplus A \otimes \Lambda^2 A^{(1)} & \oplus \cdots \\ & & f & f_0 df_1 & f_0 df_1 \wedge df_2 & \end{array}$$

(под каждым слагаемым записан вид элементов, его порождающих).

Элементы полученной алгебры можно перемножать. Например, $(f_0 df_1)(g_0 dg_1) = f_0 g_0 df_1 \wedge dg_1$.

Дифференциал d определяется следующим образом. Элементу $a \in A$ сопоставляется $da \in A^{(1)}$. Дальше дифференциал определяется так: $d(f_0 df_1) = df_0 \wedge df_1$. В общем случае

$$d(f_0 df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge df_m) = df_0 \wedge df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge df_m.$$

Предполагается, что $d(1) = 0$.

Для дифференциала d, определённого на таком колоссальном образовании, не выполняется условие $d(fg) = fdg + gdf$, которое должно выполняться в комплексе де Рама. Поэтому нужно взять элемент $d(fg) - fdg - gdf$ и включить его в идеал J. То, что остаётся после факторизации по идеалу J, называется комплексом де Рама.

Равенство $d^2 = 0$ выполняется после факторизации (а может быть, даже и до факторизации).

Мы проверяли, что если применить эту конструкцию к $A = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, то получим

$$\Omega^* = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n, dx_1, \dots, dx_n].$$

Если обозначить $dx_i = \xi_i$, то дифференциал задаётся формулой $d = \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Эту конструкцию можно применить и к $A = C(M)$. Сначала мы рассмотрим случай $M = \mathbb{R}^n$. Можно (и нужно) проверить, что в этом случае получится алгебра, порождённая элементами

$$f_{i_1 \dots i_s}(x_1, \dots, x_n)\xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \xi_{i_s},$$

где $f_{i_1 \dots i_s}$ — гладкая функция.

Упражнение. *Можно ли определить комплекс де Рама для $A = \mathbb{R}[x]/x^2\mathbb{R}[x]$?*

1.1. Другая конструкция комплекса де Рама

Если M — многообразие, то для нужд интегрирования мы рассматривали кососимметрические гладкие функции и строили комплекс

$$C(M) \to C(M \times M) \to C(M \times M \times M) \to \dots$$

Затем пространства кососимметрических функций факторизовались по идеалам функций, быстро убывающих вблизи диагонали.

Теорема. *Обе конструкции дают изоморфные комплексы.*

Чтобы доказать эту теорему, нужно построить отображение комплексов

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^0 & \to & \Omega^1 & \to & \Omega^2 & \to & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ C(M) & \to & C(M \times M) & \to & C(M \times M \times M) & \to & \dots \end{array}$$

Рассмотрим сначала наиболее простой случай $A = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ — полиномиальные функции на $\mathbb{R}^n$. Вместо $C(M \times M)$ (кососимметрических функций на $M \times M$) в этом случае получится

$$\mathbb{R}[x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}];$$

здесь имеется в виду, что полиномиальная функция меняет знак при одновременной перестановке двух групп переменных. Это кососимметрические в естественном смысле полиномы от двух групп переменных. Затем берём кососимметрические полиномы от трёх групп переменных, и т.д.

Займёмся построением отображений. Ясно, что $\Omega^0 = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$. Поэтому отображение $\Omega^0 \to \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ тождественно. Далее, $\Omega^1 = \{\sum f_i dx_i\}$. Чтобы построить отображение

$$\mathbb{R}[x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}] \to \Omega^1,$$

мы воспользуемся дифференциалом $d : \Omega^0 = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \to \Omega^1$. Напомним, как устроен этот дифференциал. Если $f(X)$ — функция (здесь X — вектор), то $df(X^1, X^2) = f(X^1) - f(X^2)$. Кососимметрической функции $f(X^1, X^2)$ нужно сопоставить 1-форму.

Если $A = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, то $\mathbb{R}[x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}] \cong \Lambda^2 A$. Это утверждение из линейной алгебры. Оно следует из того, что $\mathbb{R}[x_1, x_2] \cong \mathbb{R}[x_1] \otimes \mathbb{R}[x_2]$ (в пространстве $\mathbb{R}[x_1, x_2]$ — базис $x_1^i x_2^j$, а в пространствах $\mathbb{R}[x_1]$ и $\mathbb{R}[x_2]$ — базисы x_1^i и x_2^j). Этим свойством полиномы отличаются от гладких функций: для гладких функций неверно, что $C(M \times M) \cong \Lambda^2 C(M)$.

В $\Lambda^2 C(M)$ есть кососимметрическая функция $f \wedge g = f \otimes g - g \otimes f$, т.е. $(f \wedge g)(X^1, X^2) = f(X^1)g(X^2) - f(X^2)g(X^1)$. В общем случае гладких функций не любую кососимметрическую функцию можно представить в таком виде, но любой кососимметрический полином в таком виде представить можно. Поэтому для полиномиальных функций на $M = \mathbb{R}^n$ отображение $C(M \times M) \to \Omega^1$ можно строить следующим образом. Пусть $f_1 \in \Omega^0$ и $f_2 \in \Omega^0$. Тогда $f_1 \wedge f_2 \in C(M \times M)$ можно сопоставить $f_1 df_2 - f_2 df_1 \in \Omega^1$.

В общем случае конструкция такова. Рассмотрим кососимметрическую полиномиальную функцию $f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n$, которая равна альтернированной сумме выражений вида $f_1(X^1) \cdots f_n(X^n)$ (нужно, чтобы получилась кососимметрическая функция). Этой кососимметрической функции сопоставляется $Alt(f_1 df_2 \wedge df_3 \wedge \dots \wedge df_n)$.

Эту конструкцию можно применить и к произвольной алгебре A с единицей 1. Напишем

$$A \oplus \Lambda^2 A \oplus \Lambda^3 A \oplus \dots = \Lambda^*(A).$$

На такой прямой сумме имеется дифференциал. На A он действует так: $f \mapsto f \otimes 1 - 1 \otimes f$. В общем случае

$$f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n \mapsto 1 \wedge f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n.$$

Это — алгебраическая запись того, что было в интегрировании. По-другому можно сказать, что на $\Lambda^*(A)$ задаётся дифференциал δ — оператор умножения на 1. Именно эта конструкция применялась для кососимметрических функций от многих переменных.

Поясним это. Кососимметрические функции от многих переменных можно перемножать: если есть кососимметрические функции $f(X^1,\dots,X^n)$ и $g(X^1,\dots,X^m)$, то можно рассмотреть функцию

$$f(X^1,\dots,X^n)g(X^{n+1},\dots,X^{n+m})$$

и антисимметризовать её по всем точкам. Получится кософкоммутативное умножение. На таком языке то, что было дифференциалом для кософкоммутативных функций — это просто умножение на 1.

Итак, есть алгебра A (в нашем основном примере $A=\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$); есть алгебра $\Lambda^*(A)$, и на этой алгебре есть умножение на 1. Ясно, что $1\wedge(1\wedge\omega)=0$. Ещё производится факторизация по идеалу J; этот идеал можно описать чисто алгебраически. Результат факторизации — комплекс де Рама.

Основное утверждение здесь такое.

Утверждение. *Рассмотрим отображение $D:\Lambda^n A\to\Omega^{n-1}$, заданное формулой*

$$D(f_1\wedge f_2\wedge\dots\wedge f_n)=\sum(-1)^i f_i\,df_1\wedge\dots\wedge\widehat{df_i}\wedge\dots\wedge df_n.$$

Тогда отображение

$$\begin{array}{ccccccc}
A & \longrightarrow & \Lambda^2A & \longrightarrow & \Lambda^3A & \longrightarrow & \cdots\\
\downarrow D & & \downarrow D & & \downarrow D & & \\
\Omega^0 & \longrightarrow & \Omega^1 & \longrightarrow & \Omega^2 & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

является гомоморфизмом комплексов.

В первом члене получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
f & \longrightarrow & \frac{1}{2}(f\otimes 1-1\otimes f)\\
\downarrow & & \downarrow\\
f & \longrightarrow & df
\end{array}$$

Точно так же утверждение проверяется и в других членах диаграммы.

Это верно всегда, для любой алгебры A. Более важное утверждение таково. Если $A=\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$, то $\operatorname{Ker} D$ — это в точности идеал, по которому производится факторизация.

Для колец гладких кососимметрических функций тоже есть отображение D. Но возникает такая проблема. Для функций вида $f(X^1)g(X^2)-g(X^1)f(X^2)$ конструкция та же самая, но не все кососимметрические функции от двух переменных имеют такой вид. Что делать с гладкими функциями, которые не имеют такого вида? Эта трудность техническая; она легко преодолевается.

Что касается интегрирования форм, то оно производится так: берётся форма, для неё берётся элемент, из которого она происходит, и этот элемент интегрируется тем способом, как было рассказано.