Фейгин Б. Л.

Анализ на многообразиях

Второй курс. Осень 1998

1. Лекция 12

Пусть M — многообразие. Формы мы определяли как фактор алгебры кососимметрических функций на $M \times \ldots \times M$ по некоторому идеалу. Так определённые формы можно связать с векторными полями. Пусть на M есть векторное поле, т.е. линейный оператор $X : C(M) \to C(M)$, удовлетворяющий формуле Лейбница. Оператор X можно применить и к функции многих переменных, не обязательно кососимметрической. А именно, его можно применить к функции по i-й переменной. Такой оператор обозначим $X(i)$ (применение оператора X по i-й копии многообразия M). При этом $X(i)$ — векторное поле на $M \times \ldots \times M$.

С кососимметрической функцией f на $M \times \ldots \times M$ поступим так. Возьмём на M набор векторных полей $X_1, \ldots, X_{n-1}$ и рассмотрим

$$X_{n-1}(n-1) \cdots X_2(2) X_1(1) f.$$

Например, для функций от двух переменных получим $X(1)f(m_1, m_2)$. На диагонали кососимметрическая функция f обращается в нуль. Но то, что мы получили, на диагонали не обязательно обращается в нуль, поэтому можно рассмотреть $X(1)f(m_1, m_2)|_{m_1=m_2}$.

Для кососимметрических функций от трёх переменных после применения одной производной получим $X_1(1)f(m_1, m_2, m_3)|_{m_1=m_2=m_3}$; это тождественно равно нулю. Но можно применить две производных; тогда получим $X_2(2)X_1(1)f(m_1, m_2, m_3)|_{m_1=m_2=m_3}$. Эта величина уже не обязательно обращается в нуль. Точно так же можно поступить и с кососимметрической функцией от n переменных.

Итак, по кососимметрической функции f от двух переменных построено соответствие, которое векторному полю X сопоставляет функцию:

$$X \to \omega(X) = X(1)f(m_1, m_2)|_{m_1=m_2}.$$

Это сопоставление линейно по X, причём даже в таком сильном смысле: $\omega(gX) = g\omega(X)$ для любой функции $g \in C(M)$. Более того, $\omega(g_1 X + g_2 Y) = g_1 \omega(X) + g_2 \omega(Y)$. В таком случае говорят, что сопоставление линейно над алгеброй функций.

Для функций от трёх переменных получаем сопоставление

$$X_1, X_2 \to \omega(X_1, X_2) = X_2(2)X_1(1)f(m_1, m_2, m_3)|_{m_1=m_2=m_3}.$$

Свойства этого сопоставления таковы:

1) $\omega(X_1, X_2) = -\omega(X_2, X_1)$ (это следует из кососимметричности функции f);

2) $\omega(g_1 X_1 + g_2 Y_1, X_2) = g_1 \omega(X_1, X_2) + g_2 \omega(Y_1, X_2)$.

Исходя из этого наблюдения, можно дать другое определение форм.

Определение. *i-форма ω на многообразии M — это сопоставление векторным полям $X_1, \ldots, X_i$ функции $\omega(X_1, \ldots, X_i) \in C(M)$, для которого выполняются следующие свойства:*

1) кососимметричность по всем переменным $X_1, \ldots, X_i$;

2) $\omega(g_1 X_1 + g_2 Y_1, X_2, \ldots, X_i) = g_1 \omega(X_1, X_2, \ldots, X_i) + g_2 \omega(Y_1, X_2, \ldots, X_i)$.

Пространство i-форм будем обозначать Ω^i. Кососимметрической функции $C(M \times \cdots \times M)$ (здесь $i+1$ экземпляр многообразия M) описанная выше конструкция сопоставляет элемент пространства Ω^i. Идеал J форм, интегралы от которых равны нулю, это в точности ядро этого отображения.

Скажем то же самое чуть по-другому.

Если есть векторное пространство V, то i-форма на V — это сопоставление векторам $v_1, \ldots, v_i$ числа, причём это сопоставление кососимметрично и линейно по первому вектору; иными словами это — линейное отображение $\Lambda^i V \to \mathbb{R}$. Если есть многообразие M, то в каждой его точке m есть касательное пространство T_m. i-форма на M задаёт в каждой точке m линейное отображение $\Lambda^i T_m \to \mathbb{R}$; это сопоставление непрерывно зависит от точки. Это эквивалентное определение формы.

На формах есть дифференциал де Рама. Как он записывается на этом языке?

Начнём с 0-форм. Здесь всё просто: $df(X) = X(f)$.

Для 1-форм ситуация более сложная. Форме $\omega(X)$ нужно сопоставить форму от двух переменных X_1 и X_2. Это связано с коммутатором векторных полей. Если мы напишем просто $\omega([X_1, X_2])$, то это не будет 2-формой, потому что нет линейности по первой переменной. Но зато есть кососимметричность. Ещё можно написать $X_1\omega(X_2)$ и $X_2\omega(X_1)$. Из этого уже можно сконструировать нужную формулу:

$$d\omega(X_1, X_2) = X_1\omega(X_2) - X_2\omega(X_1) + \omega([X_1, X_2]).$$

Упражнение. *а) Проверить, что дифференциал де Рама $d\omega(X_1, X_2)$ действительно имеет такой вид.*

б) Написать формулу для $d\omega(X_1, \ldots, X_i)$.

1.1. Свойства комплекса де Рама

Функториальность

Пусть $\pi : M \to N$ — гладкое отображение. Оно индуцирует отображение $\pi^* : \Omega^i(M) \to \Omega^i(N)$. Функториальность, в частности, означает, что π^* — гомоморфизм комплексов де Рама, т.е. $\pi^* d = d\pi^*$.

Отображение π^* легко строится при любом определении форм. Например, при определении форм как $C(N \times \cdots \times N)/J$ функцию $f(n_1, \ldots, n_k)$ можно перенести на M. Для этого нужно положить $\pi^* f(n_1, \ldots, n_k) = f(\pi(n_1), \ldots, \pi(n_k))$. Идеал J при этом тоже переносится. При любом другом определении тоже можно построить π^*. Коммутативность диаграммы (равенство $\pi^* d = d\pi^*$) проверяется несложно.

Формула Стокса

Это свойство уже было.

Формула Картана

Это важнейшее свойство будет позже.

1.2. Приложения

Пусть есть двумерная поверхность. На ней можно построить 2-форму, проинтегрировав которую по всей поверхности, получим эйлерову характеристику поверхности. Такова наша цель. Основной геометрический объект, который будет для этого нужен, — это S^1-расслоение.

Будем рассматривать окружность S^1 как группу $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Введём более общее понятие, чем S^1-расслоение, — многообразие N с действием окружности. Пусть задан гомоморфизм S^1 в группу диффеоморфизмов многообразия N, т.е. каждому элементу $\alpha \in S^1$ сопоставлен диффеоморфизм $d(\alpha) : N \to N$, причем $d(\alpha_1 + \alpha_2) = d(\alpha_1)d(\alpha_2)$. При этом предполагается, что отображение $N \times S^1 \to N$, заданное формулой $(n, \alpha) \mapsto d(\alpha)(n)$, является гладким. В таком случае говорят, что задано действие группы S^1 на многообразии N. Говорят, что это действие без неподвижных точек (или свободное действие), если $d(\alpha)(n) \neq n$ для всех $n \in N$ и для всех $\alpha \neq 0$.

Пример 1.1. *Рассмотрим ориентируемую поверхность $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$. Пусть многообразие N состоит из пар $\{m \in \mathcal{E},\ \overrightarrow{\chi}\}$, где $\overrightarrow{\chi}$ — касательный вектор в точке n. Определим действие элемента $\alpha \in S^1$ как поворот вектора $\overrightarrow{\chi}$ на угол α (точка n остаётся на месте). Это — действие без неподвижных точек.*

1.2.1. Связность

Пусть N — многообразие со свободным действием S^1. Связность на N — это 1-форма ω на N, обладающая следующими свойствами:

(а) $d(\alpha)^*\omega = \omega$, т.е. форма ω инвариантна относительно действия группы.

(б) Отображение $S^1 \to N$, заданное формулой $\alpha \mapsto d(\alpha)$, позволяет перенести форму ω на S^1. Обозначим перенесённую форму $\omega|_{S^1}$ (эту форму называют ограничением формы ω на S^1). Для неё должно выполняться равенство $\omega|_{S^1} = d\alpha$.

Ясно, что ограничение формы ω на S^1 инвариантно. Инвариантная форма только одна. Поэтому $\omega|_{S^1} = \lambda d\alpha$. Смысл утверждения (б) в том, что $\lambda = 1$.

Теорема 1.1. *Пусть N — трёхмерное многообразие из примера 1.1; $\beta : N \to \mathcal{E}$ — естественная проекция. Пусть, далее, ω — любая связность на N (отдельный вопрос — есть ли на N хотя бы одна связность). Тогда:*

а) $d\omega = \beta^*\omega_{down}$, где ω_{down} — некоторая 2-форма на $\mathcal{E}$.

б) интеграл $\int \omega_{down}$ равен эйлеровой характеристике поверхности $\mathcal{E}$.

Обсудим подробнее, что значит задать связность на многообразии. Пусть T_n — касательное пространство в точке $n \in N$. В T_n есть подпространство l_n — касательное пространство к окружности. В l_n есть выделенный вектор u. Это связано с тем, что у окружности есть конкретная параметризация. Связность ω — это 1-форма, т.е. линейное отображение $T_n \to \mathbb{R}$. Ограничение формы ω на окружность равно $d\alpha$. Следовательно, $\omega(u) = 1$. Ядро отображения $T_n \to \mathbb{R}$ — двумерное подпространство.

Задать связность на N — это эквивалентно следующему. Для любой точки $n \in N$ в касательном пространстве T_n нужно задать 2-мерное подпространство $P(n) \subset T_n$. Эти пространства должны обладать такими свойствами:

1) $P(n) + l_n = T_n$;

2) $d(\alpha)(P(n)) = P(d(\alpha)n)$.

Задать 1-форму и задать такую структуру — одно и то же.

Такие разложения касательных пространств позволяют поднимать пути снизу наверх. А именно, пусть заданы разложения $T_n = l_n \oplus P(n)$. Путь γ на N называют интегральной кривой распределения $P(n)$, если каждый его касательный вектор лежит в $P(\gamma(s))$. Поднятие пути — это интегральная кривая. Для любой начальной точки существует единственное поднятие данного пути. (Это — теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения.)