Фейгин Б. Л.

Анализ на многообразиях

Второй курс. Осень 1998

1. Лекция 13

С прошлой лекции осталось утверждение об интегрировании формы на поверхности. Пусть $\mathcal{E}$ — двумерная поверхность. Над ней есть расслоение на окружности $N \to \mathcal{E}$. На трёхмерном многообразии N действует группа $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. На многообразии N строилась связность, т.е. 1-форма ω на N, обладающая некоторыми свойствами. Самое главное из этих свойств: форма ω инвариантна относительно действия окружности S^1. Другое условие: ограничение формы на слой S^1 — стандартная форма $d\varphi$.

Форма $d\omega$ — это 2-форма на N. При этом если X_1 — касательный вектор к окружности, то $d\omega(X_1, X_2) = 0$. Это легко следует из определений. Ясно также, что форма $d\omega$ инвариантна относительно действия окружности.

Касательное пространство внизу (в точке поверхности $\mathcal{E}$) — это фактор касательного пространства наверху (в точке многообразия N) по касательному пространству к окружности.

Если собрать всё это вместе, то получится, что форма $d\omega$ лежит в образе отображения $\Omega^2(\mathcal{E}) \to \Omega^2(N)$, т.е. форму $d\omega$ можно рассматривать как 2-форму на $\mathcal{E}$. Нас интересует интеграл $\int_{\mathcal{E}} d\omega$.

Согласно формуле Стокса, если $\nu \in \Omega^2(\mathcal{E})$ и $\nu = d\mu$, то $\int_{\mathcal{E}} \nu = 0$ (если применить формулу Стокса буквально, то получим $\int_{\mathcal{E}} \nu = \int_{\partial\mathcal{E}} \mu$; но $\int_{\partial\mathcal{E}} = \emptyset$).

Можно доказать, что Ω^2/Ω^1 — одномерное пространство. Верно и более точное утверждение. Если задана 2-форма λ на поверхности и известно, что $\int \lambda = 0$, то λ — дифференциал некоторой формы.

В нашей ситуации форма на поверхности $\mathcal{E}$, соответствующая форме $d\omega$, не обязана быть дифференциалом формы на $\mathcal{E}$. Но попытаемся её представить в виде дифференциала. Пусть X — векторное поле с изолированными особыми точками $a_1, \ldots, a_n$ на поверхности $\mathcal{E}$. На множестве $\mathcal{E} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ рассмотрим векторное поле $X/\|X\|$. У этого векторного поля длины всех векторов равна 1, т.е. оно является сечением расслоения $N \to \mathcal{E}$ над множеством $\mathcal{E} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$. Обозначим это сечение φ. Опустим формы ω и $d\omega$ вниз с помощью φ. В результате получим формы $\varphi^*\omega$ и $\varphi^*d\omega$. При этом $\varphi^*d\omega$ — это как раз та форма, которую нужно интегрировать. Но она определена не на всей поверхности $\mathcal{E}$, а лишь на $\mathcal{E} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$. Но на этом множестве форма $\varphi^*d\omega$ является дифференциалом формы $\varphi^*\omega$. Поэтому можно применить формулу Стокса следующим образом. Нарисуем вокруг особых точек малые окружности и вырежем из поверхности малые диски $D_1, \ldots, D_n$. На поверхности $\mathcal{E} \setminus \{D_1, \ldots, D_n\}$ обе формы $\varphi^*\omega$ и $\varphi^*d\omega$ определены, поэтому можно применить формулу Стокса. В результате получим

$$\int_{\mathcal{E}\setminus\{D_1,\ldots,D_n\}} \varphi^* d\omega = \int_{\{\partial D_1,\ldots,\partial D_n\}} \varphi^*\omega.$$

Если диаметры вырезанных кругов стремятся к нулю, то интеграл, стоящий в левой части равенства, стремится к искомому интегралу. Несложно доказать, что $\int \varphi^*\omega$, где интеграл берётся по малой окружности вокруг особой точки, равен индексу этой особой точки. Здесь предполагается, что интеграл по слою $\int \omega$ равен 1, т.е. $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ — длина окружности равна 1. Если же на окружности взять в качестве стандартной формы $d\alpha$, где α — угол в радианах, т.е. $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, то $\int \varphi^*\omega$ равен индексу особой точки, умноженному на 2π.

Проверка этого утверждения проводится локально. Есть малый диск D; над ним есть $D \times S^1$. Сверху есть форм ω. Ещё есть векторное поле. Если посмотреть, что именно интегрируется, то можно увидеть, что число, которое получается при интегрировании, — это число оборотов вектора, т.е. индекс. Скажем это чуть точнее. Векторное поле задаёт сечение $D \to D \times S^1$. Имеется также естественная проекция $D \times S^1 \to S^1$. Композиция этих отображений — это отображение $f : D \to S^1$. То, что интегрируется, получается так. Берётся стандартная форма $d\alpha$ на S^1 и переносится на D посредством отображения f^*. Интеграл — это число оборотов.

Ранее мы изучали расслоения на окружности над $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$. Такие расслоения характеризуются целым числом n. На пространстве расслоения есть форма связности; её можно опустить на S^2 и проинтегрировать. В результате как раз и получим число n. Получение числа n таким способом в виде интеграла называют дифференциально-геометрической конструкцией первого класса Чженя расслоения. Обобщив эту конструкцию на произвольное многообразие M, можно строить на нём разные дифференциальные формы и интегрировать их; они характеризуют многообразие замечательным образом.

1.1. Лемма Пуанкаре

Пусть есть пространство дифференциальных форм на плоском пространстве с полиномиальными коэффициентами $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_n]$. На этом пространстве есть дифференциал $d=\sum\xi_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ и другой дифференциал $\delta=\sum x_i\frac{\partial}{\partial\xi_i}$ (стягивающая гомотопия).

Про эти операторы доказывалось, что если $M=x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}\xi_{j_1}\wedge\dots\wedge\xi_{j_s}$, то $(d\delta+\delta d)M=M\cdot\deg$, где $\deg=s+\sum i_\alpha$.

Лемма Пуанкаре заключается в том, что пространство $\operatorname{Ker}d/Imd$ одномерно и порождено элементом 1. Она доказывалась так. На рассматриваемом пространстве действует оператор $\Delta=d\delta+\delta d$. При этом $d\Delta\Delta d=0$ (это следует из того, что $d^2=0$). Таким образом, операторы d и Δ коммутируют. По традиции оператор Δ называют оператором Лапласа.

Разложим пространство $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_n]$ по собственным значениям оператора Δ. Идея здесь такова. Пусть есть комплекс K, на котором действует оператор d, причём $d^2=0$. Мы хотим вычислить гомологии $\operatorname{Ker}d/\operatorname{Im}d$. Это часто бывает очень трудной задачей. По предположим, что есть дополнительно оператор $\Delta: K\to K$, коммутирующий с d. Разложим пространство K в прямую сумму по собственным значениям оператора Δ. (Пока для простоты мы считаем пространство K конечномерным.) Если x — собственный вектор оператора Δ, соответствующий собственному значению λ, т.е. $\Delta x=\lambda x$, то $\Delta dx=\lambda dx$. Это означает, что вектор dx соответствует тому же самому собственному значению, т.е. лежит в том же самом подпространстве. Если оператор Δ не диагональный (имеет жордановы клетки), то аналогичные рассуждения можно применить к присоединённым собственным векторам.

Итак, $K=\oplus K^\lambda$ и $d: K^\lambda\to K^\lambda$, т.е. комплекс раскладывается в прямую сумму подкомплексов. Это иногда бывает очень полезно.

Если есть векторное пространство и на нём оператор d, причём $d^2=0$. Как построить оператор, коммутирующий с d? Есть следующий простой способ. Пусть Y — произвольный оператор. Тогда оператор $Yd+dY$ коммутирует с с d. Этот оператор можно взять в качестве Δ и построить соответствующее разложение $K=\oplus K^\lambda$. Для удобства будем считать, что оператор Δ не имеет жордановых клеток. Рассмотрим подпространство (подкомплекс) K^λ. У этого подкомплекса мы хотим посчитать гомологии. Утверждение такое: если $\lambda\neq0$, то гомологии комплекса K^λ нулевые. Действительно, пусть $p\in K^\lambda$ и $dp=0$. Нужно доказать, что p — дифференциал чего-то. Известно, что $(Yd+dY)p=\lambda p$. Но $dp=0$, поэтому $(Yd+dY)p=d(Yp)$, а значит, $p=d(\lambda^{-1}Yp$.

Всё сводится к гомологиям в члене K^0: гомологии K и K^0 одинаковые. Эта конструкция содержательна, когда пространство K^0 маленькое. В топологии оператор Y называют стягивающей гомотопией.

Вернёмся к пространству $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_n]$. В качестве Y мы берём оператор $\delta=\sum x_i\frac{\partial}{\partial\xi_i}$. В том рецепте, который у нас был, оператор Y не обязательно должен быть дифференциалом. Для доказательства леммы Пуанкаре можно брать и другие операторы. Но такой оператор Y удобен тем, что для него оператор $Yd+dY$ устроен очень просто.

То, что пространство бесконечномерно, в этом примере не страшно. Важно лишь то, что пространство разлагается в прямую сумму собственных подпространств. Но тогда всё просто. Оператор Лапласа умножает моном на его степень, а нас интересует только часть степени 0. Такой моном — константа.

Гомологии для дифференциала δ вычисляются точно так же; ответ тот же.

Для доказательства настоящей леммы Пуанкаре можно попытаться применить ту же самую идеологию. Здесь нужно рассматривать формы вида $\sum f_{i_1\dots i_s}(x_1,\dots,x_n)\xi_{i_1}\wedge\dots\wedge\xi_{i_s}$, где $f_{i_1\dots i_s}$ — гладкая функция. Но теперь нет разложения в прямую сумму собственных подпространств оператора δ. Поэтому приходится применять искусственный приём.

Пусть есть полиномиальная форма $P=f(x_1,\dots,x_n)\xi_{i_1}\wedge\dots\wedge\xi_{i_s}$ и степень по x равна l; тогда полная степень равна $k+l$. Если $dP=0$, то $P=d\left(\frac{\delta P}{l+k}\right)$. Здесь плохо то, что приходится делить на степень; к гладким функциям эту конструкцию применить нельзя. Нужно придумать такой оператор L, что если q — многочлен степени l, то $L(q)=\frac{\delta q}{l+k}$. Конструкция такого оператора устроена следующим образом. Случай $k=0$ здесь исключительный. В этом случае $q(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$ — гладкая функция и $q(0)=0$. Положим

$(Lq)(Y) = \int \frac{q(x)}{|x|}$, где интеграл берётся по отрезку $[0, Y]$. Для полиномов это даёт то, что нужно. Надо ещё проверить, что гладкая функция переходит в гладкую. Это следует из того, что для полиномов это верно, а если кратность функции в нуле большая, то и у полученной функции кратность в нуле тоже большая. Если $k > 0$, то полагаем $(Lq)(Y) = \frac{1}{|Y|^k} \int q|x|^{k-1}$, где интеграл снова берётся по отрезку $[0, Y]$.

Интересен только случай $k > 0$, потому что в случае $k = 0$ гомологии вычисляются легко. Пусть $dp = 0$. Мы хотим проверить, что $d[L(\delta p)] = p$. Для полиномов это верно. Один способ доказательства в общем случае — непосредственная проверка этой формулы. Но можно воспользоваться и тем, что для полиномов это верно.

1.2. Формула Картана

Пусть M — многообразие, $\Omega^0 \to \Omega^1 \to \ldots$ — комплекс де Рама. На M есть векторные поля; они действуют на функциях и на формах. На формах они действуют так. Если есть диффеоморфизм $D : M \to M$, то он действует на формах. А векторные поля — это инфинитезимальные диффеоморфизмы. Это означает, что если X — векторное поле и $\omega \in \Omega^i$, то можно, как говорят, продифференцировать ω вдоль поля X (лиевское дифференцирование, или дифференцирование Ли). Результат обозначают $L_X(\omega)$.

Например, если форма определяется как кососимметрическая функция $f(P_1, \ldots, P_{i+1}$, то $L_X f$ — сумма $i+1$ слагаемых: сначала X применяем по первой переменной (зафиксировав остальные), затем по второй, и т.д. Этот оператор можно записать в виде

$$X \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + 1 \otimes X \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots$$

Идеал, по которому производится факторизация, устойчив относительно этого действия.

Было и другое описание форм. Например, 1-форма сопоставляет векторному полю Y функцию $\omega(Y)$. При таком определении

$$L_X \omega(Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X, Y]).$$

Действие векторного поля выражается через основные операции на векторных полях, которые у нас есть. Для 2-форм получаем

$$(L_X \omega)(Y_1, Y_2) = X(\omega(Y_1, Y_2)) - \omega([X, Y_1], Y_2) - \omega(Y_1, [X, Y_2]).$$

Для векторного поля Y определена ещё подстановка его в форму. Эту операцию обозначают $i_Y : \Omega^i \to \Omega^{i-1}$. Она устроена так. Если есть форма $\omega(X_1, \ldots, X_i)$, то

$$i_Y \omega(X_1, \ldots, X_{i-1}) = \omega(Y, X_1, \ldots, X_{i-1}).$$

На комплексе де Рама действуют операторы L_Y, d и i_Y. Формула Картана связывает эти операторы:

$$L_Y = d i_Y + i_Y d.$$

Для Ω^0 это сводится к определению: $df(Y) = Y(f)$.

Замечание. Рассмотрим $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$, где $\xi_i = dx_i$. Если есть векторное поле $Y = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, то оператор подстановки имеет вид $i_Y = \sum f_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$. Например, оператор $\delta = \sum x_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$ возникает из эйлерова векторного поля $\sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, которое возникает из группы растяжений. Применение эйлерова векторного поля к форме данной степени однородности — умножение её на степень однородности.