Фейгин Б. Л.

Анализ на многообразиях

Второй курс. Осень 1998

Лекция 2

Я скажу, как строятся экзотические гладкие структуры на S^7. Возьмем 5-мерное комплексное пространство $\mathbb{C}^5$ с координатами $z_1, \dots, z_5$. Рассмотрим в нем сферу S^9, заданную уравнением $z_1\bar{z}_1 + \dots + z_5\bar{z}_5 = 1$. Поверхность, заданная комплексным уравнением

$$z_1^{6k-1} + z_2^3 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = 1,$$

высекает в S^9 подмножество K.

Факты такие: K является подмногообразием в S^9 размерности 7. Топологически это всегда будет 7-мерная сфера. Но при $k = 1, 2, 3, \dots, 28$ с дифференциальной точки зрения все эти сферы будут разными.

Кокасательное расслоение

Пусть X — многообразие, $C^\infty(X)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций на нем. Если $p \in X$ и $J_p \subset C^\infty(X)$ — подпространство функций, обращающихся в нуль в точке p, то $C^\infty(X)/J_p \cong \mathbb{R}$. Идеал J_p максимальный.

Для идеала J_p можно рассмотреть последовательность идеалов $J_p \supset J_p^2 \supset J_p^3 \supset \dots$

Идеал J_p^2 по определению порожден произведениями fg, где f, $g \in J_p$.

Если $X = \mathbb{R}^n$ и $p = 0$, то из леммы Адамара вытекает, что $J_0^2 = \{f \mid f(0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0\}$. Лемма Адамара относится с случаю идеала J_p^2, но легко усовершенствовать эти рассуждения и доказать, что

$$J_0^3 = \left\{ f \mid f(0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(0) = 0 \right\},$$

и т.д. для $J_p^4, J_p^5, \dots$ Это делается точно так же.

Для любого многообразия верно абсолютно то же самое. По определению многообразия у любой его точки p есть окрестность, в которой можно задать координаты $x_1, \dots, x_n$. Для этих координат утверждение сохраняется.

Определение. *Слой кокасательного расслоения в точке $p \in X$ — это J_p/J_p^2. При этом $\dim(J_p/J_p^2) = n$ — размерность многообразия X.*

Каждой точке $p \in X$ мы сопоставили векторное пространство J_p/J_p^2, которое будем обозначать $(T(p))^*$. Пусть T^* — теоретико-множественное объединение пространств $(T(p))^*$. Тогда имеется отображение $T^* \to X$. Элемент пространства T^* — это точка и кокасательный вектор.

Утверждение. *На множестве T^* имеется естественная структура гладкого многообразия.*

Кокасательное расслоение — это весь объект $\pi : T^* \to X$ со структурой гладкого многообразия на T^*.

Чтобы понять, почему на T^* есть структура гладкого многообразия, нужно понять, как T^* устроено. Возьмем точку $p \in X$ и выберем ее окрестность U, гомеоморфную шару. На U есть координаты $x_1, \dots, x_n$. Если $X = \mathbb{R}^n$, то множество пар

$$(p \in \mathbb{R}^n \mid \text{кокасательный вектор})$$

естественно отождествляется с $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$. А именно, паре

$$\left(p \in \mathbb{R}^n \mid (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\right)$$

сопоставляется следующий элемент пространства J_p^2/J_p:

$$\alpha_1(x_1 - p_1) + \cdots + \alpha_n(x_n - p_n).$$

Если U не всё $\mathbb{R}^n$, то ничего не меняется: если $U \subset \mathbb{R}^n$, то как многообразие $T^*(U) \cong U \times \mathbb{R}^n$.

Для каждой окрестности $\pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^n$. Нужно проверить, что разные окрестности хорошо склеиваются (как это требуется в определении многообразия). Это очень просто, но я сейчас это делать не буду. В результате получаем векторное расслоение, потому что слой — векторное пространство.

1-формы на многообразии

1-форма на многообразии X — это гладкое сечение кокасательного расслоения. Сечением расслоения $\pi : T^* \to X$ называют такое отображение $t : X \to T^*$, что $\pi \circ t = \mathrm{id}$. Гладкое сечение — это гладкое отображение многообразий.

Иными словами, каждой точке $p \in X$ относится кокасательный вектор в точке p. Вектор гладко меняется от точки к точке (точно это можно сказать так: отображение является морфизмом гладких многообразий).

Форма ω точке p соотносит кокасательный вектор $\omega(p)$. Если есть две формы ω_1 и ω_2, то кокасательные векторы $\omega_1(p)$ и $\omega_2(p)$ можно складывать и умножать на числа. Поэтому 1-формы образуют векторное пространство.

Давайте обсудим конструкцию, которая соотносит точке p кокасательное пространство J_p/J_p^2. Можно соотносить и другие пространства, построенные по функциям. Например, точке p можно соотносить пространство J_p^2/J_p^3. Оно имеет размерность $n(n+1)/2$ (матрица вторых частных производных симметрическая). Пространство J_p^3/J_p^4 будет иметь размерность $n(n+1)(n+2)/6$.

А еще можно делать так. Объект, который отвечает за локальное поведение функций в точке p, разумно строить так. Сначала берем $C^\infty(X)/J_p \cong \mathbb{R}$. Затем берем $C^\infty(X)/J_p^2$. Размерность этого факторпространства равна $n+1$, где n — размерность многообразия. Это будет пространство с умножением. Например, если $X = \mathbb{R}^n$ с координатами $x_1, \ldots, x_n$, то

$$C^\infty(X)/J_0^2 \cong \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]/\{x_i x_j\},$$

где $x_i x_j$ — все многочлены степени не менее 2.

Для любого многообразия X алгебра $C^\infty(X)/J_0^k$ изоморфна алгебре многочленов $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, профакторизованной по идеалу многочленов степени $\geq k$.

Локализация в точке p

Для пространства $C^\infty(X)$ можно построить бесконечную последовательность сюръективных отображений

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_4} C^\infty(X)/J_p^3 \xrightarrow{\varphi_3} C^\infty(X)/J_p^2 \xrightarrow{\varphi_2} C^\infty(X)/J_p \cong \mathbb{R}$$

Если есть такое образование, то можно построить алгебру, состоящую из бесконечных наборов $\ldots a_3,\, a_2,\, a_1$ $(a_k \in C^\infty(X)/J_p^k)$, удовлетворяющих условию $\varphi_k(a_k) = a_{k-1}$. Наборы $\ldots a_3,\, a_2,\, a_1$ и $\ldots b_3,\, b_2,\, b_1$ складываются и умножаются покомпонентно.

Если такую конструкцию применить к $\mathbb{R}^n$, то получится алгебра формальных степенных рядов $\mathbb{R}[[x_1, \ldots, x_n]]$. Результат каждой факторизации — это многочлены с точностью до многочленов степени не выше данной.

Анализ на многообразиях — это до поры до времени бескоординатное изложение обычного анализа.

Результатом конструкции алгебры формальных рядов тоже является расслоение — в каждой точке p сидит своя алгебра степенных рядов.

Если f — функция на X, то по этой функции можно построить последовательность $\ldots a_3, a_2, a_1$, т.е. элемент алгебры формальных рядов. Это — бескоординатное описание ряда Тэйлора.

Вернемся к пространству 1-форм. Его обозначают $\Omega^1(X)$. 1-форма ω сопоставляет точке p элемент пространства J_p/J_p^2, который гладко зависит от точки. Пространство функций в таком контексте обозначают $\Omega^0(X)$: функции называют 0-формами.

Дифференциал де Рама $d : \Omega^0(X) \to \Omega^1(X)$ сопоставляет функции f набор ее производных, т.е. точке $p \in X$ сопоставляется элемент $f - f(p) \in J_p$ (из функции вычитается постоянная, равная значению функции в точке p), а затем этому элементу сопоставляется элемент факторпространства J_p/J_p^2.

Замечание. Если $f \in \Omega^0$ и $\omega \in \Omega^1$, то $f\omega \in \Omega^1$. Действительно, функция каждой точке сопоставляет число, а 1-форма каждой точке сопоставляет вектор. Вектор можно умножить на число. Таким образом, 1-формы — это нечто большее, чем просто векторное пространство. (Сечение векторного расслоения можно умножить на функцию.)

Из определения 1-формы следует формула Лейбница:

$$d(fg) = fdg + gdf.$$

Действительно, нужно проверить, что в точке p функции $fg - f(p)g(p)$ и $f(g-g(p))+g(f-f(p))$ совпадают с точностью до элемента J_p^2. Ясно, что их разность равна $(f-f(p))(g-g(p)) \in J_p^2$.

Векторное поле — это отображение $L : C^\infty \to C^\infty$, удовлетворяющее свойству $L(fg) = L(f)g + fL(g)$. Дифференциал де Рама $d : C^\infty = \Omega^0(X) \to \Omega^1(X)$ тоже удовлетворяет такому свойству. Попытаемся эти вещи связать друг с другом.

На многообразии X мы построили кокасательное расслоение: каждой точке p сопоставлено кокасательное пространство $T^*(X)$. Можно построить двойственное, или сопряженное, расслоение. Раньше точке p мы сопоставляли пространство J_p/J_p^2, а теперь будем сопоставлять двойственное пространство $(J_p/J_p^2)^*$. Следует иметь в виду, что с векторными расслоениями можно проделывать все операции, которые можно проделывать с векторными пространствами. Векторные пространства можно складывать, и касательные расслоения (над одним и тем же пространством) можно складывать. Можно переходить к двойственному векторному пространству, поэтому можно это сделать в каждой точке и получить двойственное расслоение.

Расслоение, при котором точке p сопоставляется векторное пространство $(J_p/J_p^2)^*$, — это касательное расслоение. Сечения этого расслоения — векторные поля. У нас уже было алгебраическое определение векторного поля. Теперь у нас есть геометрическое определение. Нужно понять, почему эти два понятия совпадают.

При геометрическом подходе точке p сопоставляется $L(p) \in (J_p/J_p^2)^*$. Теперь мы хотим по функции f вычислить $L(f)$ в точке p. Сначала функции f сопоставляется $f - f(p)$ (делаем то же самое, что делается при дифференцировании функции по де Раму). После этого мы попадаем в пространство J_p/J_p^2. У нас есть функционал $L(p) \in (J_p/J_p^2)^*$. Применив его к элементу пространства J_p/J_p^2, получим число. Итак, по функции и точке мы построили число. Это и есть функция.

Это важно, поэтому я ещё раз повторю практически то же самое. Сначала мы применяем дифференциал де Рама $d : C^\infty(X) \to \Omega^1(X)$. Если есть 1-форма $\omega \in \Omega^1(X)$ и векторное поле L, т.е. $L(p) \in (J_p/J_p^2)^*$, то L и ω можно спарить и сопоставить им функцию (в каждой точке число). Такая операция (подстановка векторного поля в дифференциальную форму) часто будет у нас встречаться. Она обозначается $i_L\omega$.

Для $\mathbb{R}^n$ мы отождествляли пространство кокасательного расслоения с $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$. В каждой точке $\mathbb{R}^n$ есть кокасательное пространство, и все эти кокасательные пространства отождествлены друг с другом. Стандартное обозначение базиса в исходном $\mathbb{R}^n$ — $x_1, \ldots, x_n$; базис в кокасательном пространстве обозначается $dx_1, \ldots, dx_n$. Тогда 1-форма записывается в виде $\sum f_i dx_i$.

Давайте снова произведем это отождествление. На $\mathbb{R}^n$ есть координатные функции $x_1, \ldots, x_n$. Если их продифференцировать (взять дифференциал d), то получатся $dx_1, \ldots, dx_n$. Это — сечения расслоения, причем они образуют базис. Это означает, что любую форму ω можно разложить по этому базису и получить $\omega = \sum f_i dx_i$.

Упражнение. *Пусть f — любая функция. Тогда df — некоторая форма. В каждой точке ее можно разложить по базису: $f = \sum u_i dx_i$. Чему равны u_i?*

Ответ: $u_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Пусть есть многообразие X и диффеоморфизм $D : X \to X$. Тогда D действует на функции. Вопрос: действует ли D на 1-формы каким-нибудь естественным образом? Диффеоморфизм D переводит точку p в точку $D(p)$. На функции он действует так: $J_{D(p)} \to J_p$. Это индуцирует действие $J_{D(p)}/J^2_{D(p)} \to J_p/J_p^2$. При этом 1-формы переходят в 1-формы.

Диффеоморфность D здесь ни при чем; эту конструкцию можно проделать и для произвольного гладкого отображения $D : X \to Y$. Функции на Y переносятся в функции на X. По аналогичной причине формы на Y переносятся в формы на X. Если какие то объекты переносятся по стрелке отображения в ту же сторону, то обозначение d_*; если же они переносятся в противоположную сторону, то обозначение d^*.