Фейгин Б. Л.

Анализ на многообразиях

Второй курс. Осень 1998

1. Лекция 3

На прошлой лекции шла речь о кокасательном и касательном расслоении. Необходимо напомнить некоторые понятия, связанные с векторными расслоениями, потому что иначе будет трудно двигаться вперед.

Векторные расслоения

Пусть X — топологическое пространство. Локально тривиальное векторное расслоение на X (вещественное или комплексное) — это набор таких данных: топологическое пространство E и проекция $\pi : E \to X$. Множество $\pi^{-1}(x)$ называют слоем над точкой $x \in X$. При этом должны выполняться следующие свойства:

а) на каждом слое имеется структура векторного пространства (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$);

б) для любой точки $x \in X$ существует окрестность U_x, для которой имеется гомеоморфизм $\varphi : \pi^{-1}(U_x) \to U_x \times \mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$), согласованный с проекцией π, т.е. композиция отображений

$$U_x \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi^{-1}} \pi^{-1}(U_x) \xrightarrow{\pi} U_x$$

является проекцией на первый множитель.

Первый пример — тривиальное расслоение $E = \mathbb{R}^n \times X$. Проекция естественная. Локальная тривиальность (свойство б) означает, что у каждой точки есть окрестность, над которой расслоение тривиально.

Расслоения $\pi_1 : E_1 \to X$ и $\pi_2 : E_2 \to X$ называют эквивалентными, или изоморфными, если существует такое отображение $\varphi : E_1 \to E_2$, что $\varphi\pi_2 = \pi_1$ и отображение $\pi_1^{-1} \xrightarrow{\varphi} \pi_2^{-1}$ является изоморфизмом векторных пространств.

Если X — точка, то теория векторных расслоений на X — это просто теория векторных пространств: в каждой размерности имеется ровно один класс эквивалентных расслоений. С этой точки зрения теория векторных расслоений является обобщением линейной алгебры.

Первый вопрос — сколько бывает попарно не изоморфных векторных расслоений на пространстве X. Это очень важная характеристика пространства X, которая отчасти сродни когомологиям.

Если есть пространство X и векторные расслоения E_1 и E_2 на нем. Тогда можно организовать расслоение $E_1 \oplus E_2$ — берется прямая сумма слоев на точкой x. Здесь есть один простой факт, который нуждается в доказательстве. Давайте обозначим $B_n(X)$ множество классов эквивалентности n-мерных расслоений на X (это не стандартное обозначение). Тогда есть операция $B_n(X) \times B_m(X) \to B_{n+m}(X)$, индуцированная сложением расслоений. Нужно проверить, что суммы эквивалентных расслоений эквивалентны. Это почти очевидно, но такие вещи нужно проверять. Таким образом, множество расслоений образует полугруппу.

Аналогично определяются $E_1 \otimes E_2$, $Hom(E_1, E_2)$.

Сложение и умножение расслоений взаимно удовлетворяют ассоциативности и дистрибутивности. Нет только возможности вычитать расслоения.

Описание расслоений посредством функций перехода

Пусть есть пространство X. Мы знаем, что у каждой точки $x \in X$ есть окрестность, над которой расслоение тривиально. Зададим X и его открытое покрытие $\{U_1, U_2, \ldots\}$ Желательно, чтобы это покрытие было поменьше. Если X компактно, то возьмем конечное покрытие. Ограничение расслоения на каждое множество U_i тривиально. Поэтому имеются изоморфизмы $\pi^{-1}U_i \cong \mathbb{R}^n \times U_i$ и $\pi^{-1}U_j \cong \mathbb{R}^n \times U_j$. На пересечении $U_i \bigcap U_j$ есть два отображения

$$\pi^{-1}(U_i \bigcap U_j) \cong \mathbb{R}^n \times (U_i \bigcap U_j).$$

Поэтому для каждой точки $x \in U_i \bigcap U_j$ есть два изоморфизма векторных пространств: $\alpha_i : \pi^{-1}(x) \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$. Получаем отображение $g_{ij}(x) = \alpha_1^{-1}\alpha_2$. Отображение g_{ij} является непрерывным отображением

$$g_{ij} : U_i \bigcap U_j \to GL_n(\mathbb{R}).$$

Итак, у нас есть открытое покрытие $\{U_i\}$ и набор непрерывных отображений $\{g_{ij} : U_i \bigcap U_j \to GL_n(\mathbb{R})\}$. Эти отображения обладают следующими свойствами:

1) $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$;

2) на пересечении $U_i \bigcap U_j \bigcap U_k$ выполняется соотношение $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$.

Факт такой: по отображениям g_{ij}, обладающим такими свойствами, всегда можно построить расслоение.

Если есть расслоение $\pi : E \to X$, то сечением этого расслоения называют такое непрерывное отображение $\varphi : X \to E$, что $\pi\varphi = \mathrm{id}_X$. Иными словами, сечение сопоставляет каждой точке вектор в слое над этой точкой.

Если расслоение E имеет размерность n, то оно тривиально тогда и только тогда, когда у него есть n таких сечений $s_1, \ldots, s_n$, что для любой точки $x \in X$ векторы $s_1(x), \ldots, s_n(x)$ образуют базис в слое над x, т.е. базисы во всех слоях можно выбрать согласованным образом. Это понятно: изоморфизм $E \cong \mathbb{R}^n \times X$ это и есть выбор базиса. В обратную сторону тоже очевидно.

С этой точки зрения функции перехода удобно представлять так. Над каждым множеством U_i есть набор сечений $s_1, \ldots, s_n$. Над $U_i \bigcap U_j$ есть два набора сечений. Тогда g_{ij} — матрица перехода от одного базиса сечений к другому, т.е. g_{ij} — функции склейки.

Вернемся к построению расслоения по функциям g_{ij}. Пространство X покрыто множествами U_i. Пространство E можно представить как множества $U_i \times \mathbb{R}^n$, которые склеиваются друг с другом посредством отображений g_{ij}.

Если задан набор отображений $\{g_{ij} : U_i \bigcap U_j \to GL_n(\mathbb{R})\}$, для которого выполняются два вышеупомянутых условия, то такой набор называют 1-коциклом со значениями в группе $GL_n(\mathbb{R})\}$.

Пусть есть пространство X набор g_{ij}. В каком случае расслоение, которое при этом получится, тривиально? Ответ такой: расслоение тривиально тогда и только тогда, когда существует набор отображений $\mu_i : U_i \to GL_n(\mathbb{R})\}$, для которого $\{g_{ij} = \mu_i \mu_j^{-1}$. Выполнение двух требуемых условий для g_{ij} очевидно. Нужно лишь проверить, что расслоение будет тривиально.

Предположим, что расслоение тривиально. Тогда есть базис сечений $s_1, \ldots, s_n$. Над каждым U_i по определению есть базис сечений $s_1^{(i)}, \ldots, s_n^{(i)}$. Пусть μ_i — матрица перехода от базиса s к $s^{(i)}$. В результате получим отображение $\mu_i : U_i \to GL_n(\mathbb{R})\}$. Тогда на пересечениях по определению $g_{ij} = \mu_i \mu_j^{-1}$. Это проверка в одну сторону. В обратную сторону те же самые рассуждения нужно обратить.

Если 1-коцикл $\{g_{ij} : U_i \bigcap U_j \to GL_n(\mathbb{R})\}$ получается из 0-коцикла $\mu_i : U_i \to GL_n(\mathbb{R})\}$ по правилу $g_{ij} = \mu_i \mu_j^{-1}$, то 1-коцикл называют границей 0-коцикла. Граничный оператор сопоставляет 0-коциклу μ_i 1-коцикл $g_{ij} = \mu_i \mu_j^{-1}$.

Задача 1.1. *Если есть двумерная сфера S^2, то ее можно покрыть двумя открытыми множествами, гомеоморфными дискам. Касательное расслоение задается отображением $U_1 \bigcap U_2 \to GL(2, \mathbb{R})\}$. Как устроено это отображение?*

Здесь $U_1 \bigcap U_2$ и $GL^+(2, \mathbb{R})\}$ гомотопны окружности S^1.

Пусть имеется непрерывное отображение $\theta : X \to Y$ и на Y задано расслоение E. Тогда на X можно построить расслоение, которое обозначается $\theta^* E$. А именно, пространство расслоения таково:

$$\theta^*(E) = \{x \in X,\ v \in \pi^{-1}(\theta(x))\}.$$

Отображение $\theta^*(E) \to X$ очевидно: $(x, v) \mapsto v$. Легко проверяется, что получается локально тривиальное расслоение.

Например, пусть есть отображение $S^2 \to \mathbb{R}^3$. Рассмотрим многообразие $G(2,3)$ 2-мерных плоскостей в 3-мерном пространстве. По отображению $S^2 \to \mathbb{R}^3$ можно построить отображение $S^2 \to G(2,3)$: каждой точке сопоставляется касательная плоскость, перенесенная в начало координат. На грассмановом многообразии $G(2,3)$ можно построить каноническое 2-мерное расслоение $E \to G(2,3)$. Здесь

$$E = \{a \text{ — 2-мерное пространство}, v \in a\}.$$

Проекция сопоставляет паре (a, v) плоскость a. Нужно проверить, что на E есть топология и расслоение локально тривиально. Если с помощью отображения $S^2 \to \mathbb{R}^3$ на S^2 индуцировать расслоение $E \to G(2,3)$, то на S^2 получится касательное расслоение.

Можно рассматривать также и ориентированные плоскости.

Теперь я сформулирую несколько утверждений о расслоениях.

1) На стягиваемом топологическом пространстве любое расслоение тривиально.

2) Пусть E — расслоение на пространстве $X \times I$. Тогда можно рассмотреть ограничение этого расслоения на $X \times \{t\}$ (если есть расслоение $E \to Z$ и $X \subset Z$, то вложение $X \to Z$ позволяет индуцировать расслоение на X). Это будет расслоение на X, которое мы обозначим E_t. Утверждение такое: расслоения E_0 и E_1 изоморфны.

Смысл этого утверждения такой: расслоения не деформируются, т.е. при деформации расслоения не изменяются.

Следствие. *Пусть на Y есть расслоение E и пусть имеются гомотопные отображения $\varphi_1 : X \to Y$ и $\varphi_2 : X \to Y$. Тогда расслоения $\varphi_1^*(E)$ и $\varphi_2^*(E)$ эквивалентны.*

Действительно, гомотопия представляет собой отображение $X \times I \to Y$. На $X \times I$ можно индуцировать расслоение.

Пространство n-мерных подпространств в $\mathbb{R}^m$ будем обозначать $G(n, m)$. Это пространство называют грассмановым многообразием. Пусть X — топологическое пространство (для простоты будем считать его компактным, хотя это и не обязательно). Пусть E — расслоение на X, имеющее размерность n. На $G(n, m)$ существует тавтологическое расслоение $\xi_n = \{\alpha, v \in \alpha\}$, где α — n-мерная плоскость.

Теорема 1.1. *Для любого n-мерного расслоения E на X существует число m (достаточно большое) и существует отображение $\theta : X \to G(m, n)$, для которого $\theta^*(\xi_n) \cong E$.*

Задача 1.2. *На сфере S^2 есть следующие расслоения:*

а) касательное расслоение;

б) $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ можно рассмотреть как множество комплексных прямых в $\mathbb{C}^2$; в таком случае возникает тавтологическое одномерное комплексное расслоение на комплексном грассманиане;

в) на $\mathbb{C}P^1$ есть одномерное комплексное касательное расслоение.

Доказать, что эти расслоения попарно не эквивалентны.