Фейгин Б. Л.

Анализ на многообразиях

Второй курс. Осень 1998

1. Лекция 4

В прошлый раз было сформулировано следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Пусть X — компактное пространство, $E \to X$ — векторное расслоение (вещественное). Тогда существует число m и существует отображение $\pi : X \to G(n,m)$, для которых $E = \pi^*(\xi)$, где ξ — тавтологическое расслоение.*

Доказательство этой теоремы опирается на следующую лемму (которую я не буду в полной мере доказывать).

Лемма. *Пусть X — компактное пространство, $E \to X$ — векторное расслоение. Тогда существует такой набор сечений $s_1, \ldots, s_m$, что над любой точкой $x \in X$ векторы $s_1(x), \ldots, s_m(x) \in \pi^{-1}(x)$ порождают пространство $\pi^{-1}(x)$.*

Если E — тривиальное расслоение, то можно взять $n = \dim E$ сечений. Если же расслоение нетривиально, то нужно взять большее количество сечений.

Например, сферу S^2 можно покрыть двумя областями, над которыми расслоение тривиально. С каждой области на другую сечения продолжаем произвольным образом. В результате получаем 4 сечения. (Можно обойтись и тремя сечениями, но для нас это сейчас не важно.)

Если X покрыто конечным числом открытых множеств $U_1, \ldots, U_k$, над которыми расслоение тривиально. Над каждым из этих множеств нужно выбрать тривиализующие сечения, а затем продолжить их произвольно на всё пространство X. Для этого нужна техника разбиений единицы. Компактность используется для того, чтобы покрытие было конечным. Иначе могут возникнуть проблемы, по крайней мере при таком способе доказательства.

Сечения векторного расслоения образуют векторное пространство $\Gamma(E)$. В нём согласно лемме есть набор $s_1, \ldots, s_m$, который задаёт вложение $\mathbb{R}^m \subset \Gamma(E)$. Каждой точке $x \in X$ поставим в соответствие пространство V_x сечений расслоения E, обращающихся в нуль в точке x. При этом $\dim(\Gamma(E)/V_x) = n = \dim E$ — при факторизации остаётся слой. В результате получается отображение из X в множество G, состоящее из подпространств коразмерности n в бесконечномерном пространстве $\Gamma(E)$. Если бы у нас было конечномерное пространство W и в нём мы рассматривали множество всех подпространств коразмерности n, то это как раз и был бы нужный нам грассманиан. Пока предположим, что G не просто множество, но и топологическое пространство. Тогда на нём есть тавтологическое n-мерное расслоение

$$\xi = \{a \text{ — подпространство в } W \text{ коразмерности } n, \text{ вектор в } W/a\}.$$

Если $W = \Gamma(E)$, G — подпространства коразмерности n, то прообраз расслоения ξ при отображении $x \mapsto V_x$ является как раз расслоением E.

Недостаток этой конструкции в том, что пространство W бесконечномерное. Чтобы это исправить, нужно повторить все рассуждения в следующей конечномерной ситуации. Набор сечений задаёт вложение $\mathbb{R}^m \to \Gamma(E)$. Каждой точке x сопоставим пространство $V_v \bigcap \mathbb{R}^m$, т.е. пространство сечений $\sum \alpha_i s_i$, для которых $(\sum \alpha_i s_i)(x) = 0$. Тогда получается отображение $X \to G(m-n, m)$. Повторяя прежние рассуждения, посредством переноса расслоения ξ получаем расслоение E.

В прошлый раз было сформулировано такое утверждение. Если есть гомотопные отображения $\alpha_1 : X \to Y$ и $\alpha_2 : X \to Y$ и на Y есть расслоение ν, то тогда расслоения $\alpha_1^*(\nu)$ и $\alpha_2^*(\nu)$ эквивалентны. Комбинируя это с предыдущим, можно получить такое утверждение. Пусть X компактно. Тогда множество классов n-мерных расслоений на X и множество классов непрерывных отображений $X \to G(m-n, m)$ с точностью до гомотопии — это одно и то же, если m достаточно велико. Описание расслоений сводится к топологической задаче описания отображений с точностью до гомотопии.

Теперь я сделаю уточнение по поводу функций перехода. Пусть X — топологическое пространство, $\{U_i\}$ — открытое покрытие X и задан набор непрерывных отображений $g_{ij} : U_i \bigcap U_j \to GL(n, \mathbb{R})$, удовлетворяющий двум ранее сформулированным условиям. Пусть есть еще один такой набор отображений $g'_{ij} : U_i \bigcap U_j \to GL(n, \mathbb{R})$. Вопрос такой: когда расслоения E и E', отвечающие этим наборам, эквивалентны? Я сформулирую ответ: расслоения E и E' изоморфны тогда и только тогда, когда существует набор отображений $\mu_i : U_i \to GL(n, \mathbb{R})$, для которого

$$g_{ij}(g'_{ij})^{-1} = \mu_i \mu_j^{-1}|_{U_i \bigcap U_j}.$$

Проверка этого достаточно простая. Пусть расслоения эквивалентны. Для расслоения E на каждом U_i есть набор сечений $s_1^{(i)}, \ldots, s_n^{(i)}$. Отображения g_{ij} на $U_i \bigcap U_j$ — это переход от одного базиса к другому. Для расслоения E' на U_i есть набор сечений $s_1^{(i)\prime}, \ldots, s_n^{(i)\prime}$. Расслоения эквивалентны, поэтому есть отображение $E' \to E$, при котором набор сечений $s_1^{(i)\prime}, \ldots, s_n^{(i)\prime}$ переходит в некоторый другой набор сечений. Таким образом, на U_i есть два набора сечений. Матрица перехода между ними и есть μ_i. Доказательство в другую сторону проводится точно так же.

Множество классов расслоений можно описывать как множество отображений g_{ij}, рассматриваемых с точностью до μ_i. В качестве примера рассмотрим описание 2-мерных расслоений на S^2. Задание такого расслоения эквивалентно заданию отображения $U_+ \bigcap U_- \to GL(2, \mathbb{R})$. Группу $GL(2, \mathbb{R})$ можно уменьшить до $SO(2, \mathbb{R}) = S^2$. У нас есть отображения $g_\pm : U_+ \bigcap U_- \to S^1$. Два отображения эквивалентны, если $g_\pm(g'_\pm)^{-1} = \mu_+ \mu_-^{-1}$, где $\mu_\pm : U_\pm \to S^1$. Можно даже заменить $U_+ \bigcap U_-$ на S^1. Отображение $g_\pm$ эквивалентно нулю, если его можно представить в виде $g_\pm = \mu_+ \mu_-^{-1}$. Можно проверить, что отображение $g_\pm$ представляется в виде $g_\pm = \mu_+ \mu_-^{-1}$ тогда и только тогда, когда оно гомотопно отображению в точку. А два отображения эквивалентны тогда и только тогда, когда степени этих отображений равны.

Касательное и кокасательное расслоение с точки зрения функций перехода

Пусть M — гладкое многообразие. На нём задан атлас $\{U_i\}$ и отображения $\rho_i : U_i \to \mathbb{R}^n$. Опишем в этих терминах функции перехода для касательного расслоения. На множестве $U_i \bigcap U_j$ есть два отображения: ρ_i и ρ_j. Поэтому для $x \in U_i \bigcap U_j$ можно рассмотреть композицию $\rho_j \rho_i^{-1}$, которая отображает окрестность точки $\rho_i(x)$ в $\mathbb{R}^n$ в окрестность точки $\rho_j(x)$ в $\mathbb{R}^n$. У этого отображения можно взять якобиан в точке $\rho_i(x)$. Этот якобиан мы и берём в качестве функции перехода g_{ij}. Это и будут функции перехода для касательного расслоения.

По-другому то же самое утверждение можно выразить так. Есть два отображения множества $U_i \bigcap U_j$ в $\mathbb{R}^n$. На $\mathbb{R}^n$ есть векторные поля $\partial/\partial x_i$. Их можно снести в $U_i \bigcap U_j$, а затем снова отправить $\mathbb{R}^n$ (с помощью двух данных отображений). На $\mathbb{R}^n$ получится два набора векторных полей; g_{ij} — матрица перехода от одного из этих наборов к другому.

В качестве примера снова можно рассмотреть S^2. На верхнем диске есть два векторных поля, на нижнем тоже. На общей полоске есть два набора векторных полей. Можно взять матрицу перехода между ними.

Обзор определений касательного и кокасательного расслоений

Кокасательное расслоение многообразия M — это отображение $T^* \to M$, где точка T^* — это пара $(m \in M,\ v \in J_m/J_m^2)$.

Касательное расслоение многообразия M — это отображение $\pi : T \to M$, которое можно определить следующими эквивалентными способами.

(а) Слой $\pi^{-1}(m)$ — двойственное пространство к J_m/J_m^2.

(б) Элемент T^* — это пара (m, v), где v — такое отображение $C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, что $v(f \cdot g) = (vf) \cdot g + f(m)v(g)$.

(в) Определение через функции перехода.

K-функтор от топологического пространства

Пусть X — топологическое пространство, $B_n(X)$ — множество классов n-мерных расслоений. Для расслоения ξ_1 размерности n и расслоения ξ_2 размерности m можно определить расслоение $\xi_1 \oplus \xi_2$ размерности $n + m$ и расслоение $\xi_1 \otimes \xi_2$ размерности nm. Эти расслоения определяются послойно.

Если X — точка, то $B_n(X)$ состоит из одного элемента.

На множестве всех расслоений есть операции сложения и умножения, но нет вычитания. В алгебре есть операция, позволяющая по абелевой полугруппе S

(полугруппа — это означает, что элементы S можно складывать, сложение ассоциативно, коммутативно и есть элемент 0) построить естественным образом абелеву группу $\tilde{S}$. А именно, положим $\tilde{S} = \{a, b\}$ — формальные разности элементов $a, b \in S$. При этом $\{a, b\} = \{a', b'\}$, если $a + b' = b + a'$.

Применим эту конструкцию к $B_n(X)$. У нас есть операция сложения $B_n \oplus B_m \to B_{n+m}$. Есть нулевой элемент — 0-мерное расслоение. Применив конструкцию, получим абелеву группу. Умножение на неё продолжается — нужно просто раскрыть скобки в выражении $(a - b)(c - d)$. Таким образом, топологическому пространству X сопоставлено коммутативное кольцо. Это кольцо обозначают $K(X)$ и называют K-функтором топологического пространства.

С топологическим пространством X можно связать когомологии $H^*(X)$, которые трудно определяются, но легко вычисляются. А ещё можно сопоставить кольцо $K(X)$, которое легко определяется, но трудно вычисляется. Важное достижение топологии заключается в том, что выяснено, что эти два объекта крайне близки друг к другу.

Многообразия от общих топологических пространств отличаются тем, что у них есть выделенное расслоение — касательное.

Если есть векторное пространство V, то можно взять его вторую внешнюю степень $\Lambda^2 V$. То же самое можно сделать и для векторного расслоения E: ему можно сопоставить расслоение $\Lambda^2 E$. А именно, берём векторное пространство $E \otimes E$ со слоем $E_x \otimes E_x$ и выделяем в слое кососимметрическую и симметрическую части относительно перестановок: $E_x \otimes E_x = \Lambda^2 E_x \oplus S^2 E_x$.

По расслоению E можно также построить расслоения $\Lambda^3 E$ и $S^3 E$. В этом случае $E \otimes E \otimes E$ уже не исчерпывается суммой $\Lambda^3 E$ и $S^3 E$. Остающиеся объекты — тензорные поля.

Кольцо $K(X)$ имеет богатую алгебраическую структуру: помимо бинарных операций есть унарные операции: расслоению E можно сопоставить расслоения $\lambda^k E$ и $S^k E$.