Фейгин Б. Л.

Анализ на многообразиях

Второй курс. Осень 1998

1. Лекция 5

Мы еще некоторое время будем заниматься фактически топологией, а именно, расслоениями.

Пусть G -группа (мы рассматривали случай $G = GL(n, \mathbb{R})$ или $GL(n, \mathbb{C})$); X — топологическое пространство. Плоское G-расслоение на X — это объект, который задаётся следующими данными:

- покрытие X стягиваемыми множествами U_i, для которых каждое пересечение $U_i \bigcap U_j$ связно;
- для любой пары i, j, для которой $U_i \bigcap U_j \neq \emptyset$, задан элемент группы $\varphi_{ij} \in G$ так, что выполняются условия:

  (а) $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}^{-1}$;

  (б) если $U_i \bigcap U_j \bigcap U_k \neq \emptyset$, то $\varphi_{ij}\varphi_{jk} = \varphi_{ik}$.

Это очень похоже на то, что было раньше. Изменилось лишь то, что теперь $U_i \bigcap U_j \to G$ — постоянное отображение, потому что для группы G нет понятия непрерывности.

По заданным X, U_i, G, φ_{ij} можно построить топологическое пространство Y. Рассмотрим множества

$$U_i \times G = \{(\alpha, g) \,|\, \alpha \in U_i,\, g \in G\}.$$

Элементы (α, g) и (β, h) склеиваются, если $\alpha = \beta$ — один и тот же элемент пересечения $U_i \bigcap U_j$ и, кроме того, $g = h\varphi_{ij}$.

Тогда, как легко уследить, все куски склеиваются в единый объект — топологическое пространство Y. Условия на φ_{ij} нужны для того, чтобы конструкция была непротиворечива.

Пространство Y обладает следующими свойствами:

1) Есть сюръективное отображение $Y \to X$, сопоставляющее паре (α, g) точку α.

2) На Y есть действие группы G, т.е. имеется такое отображение $G \times Y \to Y$, что индуцированное им отображение $G \to Map(Y, Y)$ является гомоморфизмом групп. Это действие устроено так: $u(\alpha, g) = (\alpha, ug)$.

4) Если $u(y) = y$, то u — единичный элемент группы, т.е. действие группы G на Y не имеет неподвижных точек.

5) Если $\pi : Y \to X$ — проекция, то $\pi(y) = \pi(uy)$.

6) Если $x \in X$, то $\pi^{-1}(x) = \{uy\}$, где y — фиксированная точка.

Вместе эти свойства собираются так: группа G свободно действует на Y и фактор по этому действию изоморфен X.

В качестве примера рассмотрим $X = S^1$ и $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Покроем окружность S^1 тремя открытыми множествами U_1, U_2, U_3 так, чтобы их пересечения $U_1 \bigcap U_2$, $U_2 \bigcap U_3$ и $U_3 \bigcap U_1$ были связны. Есть три элемента α_{12}, α_{23}, $\alpha_{31} \in G$. Если все они равны 0, то Y несвязно — оно состоит из двух окружностей. Если же два элемента равны 0, а третий элемент равен 1, то Y связно; оно двулистно накрывает окружность.

Группу G называют топологической, если она является также и топологическим пространством, причём выполняются следующие условия:

- отображение $G \times G \to G$ (произведение элементов) непрерывно;
- отображение $G \to G$ ($x \mapsto x^{-1}$) тоже непрерывно.

Если G не только топологическое пространство, но и многообразие, то её называют группой Ли.

Примеры топологических групп: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$, $GL_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{C})$.

Если G — топологическая группа, то в определении плоского G-расслоения постоянные отображения можно заменить на непрерывные отображения $\varphi_{ij} : U_i \bigcap U_j \to G$. (Так у нас уже было для $G = GL_n(\mathbb{C})$.) То, что при этом получается, называют расслоением со структурной группой G.

Применим эту конструкцию к сфере S^2. Пусть U_+ — верхнее полушарие, U_- — нижнее полушарие. При этом $U_+ \bigcap U_- = E \approx S^1$. Зададим функцию переклейки $\varphi : E \to S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Нужно взять $U_+ \times S^1$ и $U_- \times S^1$. Это произведения дисков на окружности, т.е. полнотория. Если $\alpha \in E$, то нужно склеить (α, λ) и $(\alpha, \lambda\varphi(\alpha))$. Эта конструкция даёт трехмерное многообразие.

1) Если $\varphi = 1$, то при такой склейке получим $S^2 \times S^1$.

2) Если $\varphi : E \to S^1$, то $Y = S^3$ и $Y \to S^2$ — расслоение Хопфа.

Напомню, как устроено расслоение Хопфа. Возьмём $\mathbb{C}^2$ с координатами (z_1, z_2) и рассмотрим сферу S^3, заданную уравнением $z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = 1$. На S^3 действует окружность $S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, |\lambda| = 1\}$. Это действие задаётся формулой $\lambda(z_1, z_2) = (\lambda z_1, \lambda z_2)$. Фактор по этому действию (множество орбит) равен $S^3/S^2 \cong \mathbb{C}P^1 \cong S^2$.

3) Пусть $\varphi : E \to S^1$ — отображение степени n ($\lambda \to \lambda^n$). Ему соответствует расслоение $Y_n \to X$. Здесь Y_n получается из множества

$$\{(z_1, z_2) \,|\, z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = 1\}$$

отождествлением точек (z_1, z_2) и (z_1', z_2'), где $z_1' = \exp(2\pi ik/n)z_1$ и $z_2' = \exp(2\pi ik/n)z_2$.

Расслоение $Y_n \to X$ получается из расслоения Хопфа отождествлением в слое S^1 точек x и $\exp(2\pi ik/n)x$.

Пространство Y_n называют линзовым пространством.

Пусть теперь G — конечная группа. Предположим, что есть такое накрытие $Y \to X$, что на Y свободно действует G, причём если y_1 и y_2 лежат в одном и том же слое, то $gy_1 = y_2$ для некоторого $g \in G$. По такому объекту можно построить φ_{ij}. Действительно, покроем X достаточно мелкими U_i. Тогда $\pi^{-1}(U_i)$ — это набор множеств $U_i, \dots, U_i$, и действие G их переставляет. Зафиксировав одно из этих множеств, можно отождествить $\pi^{-1}(U_i)$ и $U_i \times G$. Склеивающее отображение φ_{ij} строится так. Над $U_i \bigcap U_j$ мы зафиксировали множества $U_i \times 1$ и $U_j \times 1$. Каждое из них содержит по экземпляру множества $U_i \bigcap U_j$. Сдвиг этих множеств задаётся элементом φ_{ij}.

Два накрытия $Y \to X$ и $Y' \to X$ эквивалентны, если существует изоморфизм $\alpha : Y \to Y'$, перестановочный с действием группы G.

Теорема 1.1. *Пусть на X есть покрытие $\{U_i\}$ и есть два набора $\varphi_{ij}, \varphi'_{ij} \in G$. В таком случае накрытия Y и Y' эквивалентны тогда и только тогда, когда существует такой набор $\mu_i \in G$, что $\varphi_{ij}\varphi'^{-1}_{ij} = \mu_i\mu_j^{-1}$.*

Множество различных накрытий такого сорта находится во взаимно однозначном соответствии с множеством гомоморфизмов $\pi_1(X) \to G$.

Классификация комплексных расслоений на S^2

Мы рассматриваем расслоения $Z \to S^2$, слоем которых служит n-мерное комплексное пространство.

Сначала займёмся классификацией 1-мерных расслоений.

Первый пример — тавтологическое расслоение ξ. Здесь $Z = \{(l \in \mathbb{C}P^1,\ \beta \in l)\}$ и $Z \to \mathbb{C}P^1 \approx S^2$ — естественная проекция.

Помимо тавтологического расслоения есть тривиальное расслоение, для которого $Z = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}$.

Следующий пример — расслоения ξ, ξ^2, $\xi^3 \dots$.

Ещё есть расслоения ξ^*, $(\xi^2)^*$, $(\xi^3)^* \dots$.

Теорема 1.2. *Любое комплексное расслоение изоморфно одному из этих расслоений.*

Мы снова представим S^2 в виде объединения U_+ и U_-, где $U_+ \bigcap U_- = E \approx S^1$. Над дисками U_+ и U_- расслоение тривиально. Поэтому пространство расслоения λ строится так. Существует такое отображение $\varphi : E \to \mathbb{C}^*$, что $\lambda = \{U_+ \times \mathbb{C},\ U_- \times \mathbb{C}\}$ и для каждой точки $x \in E$ точки (x, α) и $(x, \alpha\varphi(x))$ склеиваются.

Если есть два отображения $\varphi_1 : E \to \mathbb{C}^*$ и $\varphi_2 : E \to \mathbb{C}^*$, то соответствующие им расслоения эквивалентны тогда и только тогда, когда эти отображения гомотопны, т.е. числа вращения совпадают. Проверяется это непосредственно из определения. Расслоения эквивалентны тогда и только тогда, когда на экваторе $\varphi_1\varphi_2^{-1} = \mu_1\mu_2^{-1}$, где $\mu_1 : U_+ \to \mathbb{C}^*$ и $\mu_2 : U_- \to \mathbb{C}^*$. Если расслоения эквивалентны, то есть гомотопия, поэтому числа вращения равны. Если есть гомотопия, то её нужно взять за μ_2 и положить $\mu_1 = 1$.

Одномерных расслоений ровно столько, сколько целых чисел. Проверим теперь, что если расслоениям λ_1 и λ_2 соответствуют числа вращения n_1 и n_2, то расслоению $\lambda_1 \otimes \lambda_2$ соответствует число вращения $n_1 + n_2$.

У расслоения λ_1 есть сечения на U_+ и на U_-; на экваторе они различаются на отображение $\varphi_1 : E \to \mathbb{C}^*$. Для λ_2 аналогично получаем отображение $\varphi_1 : E \to \mathbb{C}^*$. Сечения тензорного произведения перемножаются, поэтому отображения φ_1 и φ_2 перемножаются. При этом их числа вращения складываются.

Если для одномерного расслоения λ склеивающая функция равна φ, то для расслоения λ^* склеивающая функция равна φ^{-1}. Поэтому расслоение $\lambda \otimes \lambda^*$ тривиально. Это можно пояснить и другим способом: имеется естественное отображение $\lambda \otimes \lambda^* \to \mathbb{C}$, при котором элементу $\alpha \otimes \beta$ сопоставляется $< \alpha, \beta >$.

Поэтому для одномерных расслоений естественно положить $\xi^{-n} = (\xi^*)^n$. Тогда будет выполняться равенство $\xi^m \otimes \xi^n = \xi^{m+n}$.

Теорема 1.3. *Пусть ρ — комплексное n-мерное расслоение на S^2. Тогда*

$$\rho = \text{тривиальное } (n-1)\text{-мерное расслоение} \oplus \xi^l.$$

При этом число l однозначно характеризуется расслоением.

Итак, расслоения на S^2 характеризуются двумя числами: размерностью и числом l. Число l любое, а размерность неотрицательна. Таким образом, K-функтор от S^2 равен $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Первый шаг доказательства такой. Если есть расслоение μ на компактном пространстве X и в этом расслоении есть подрасслоение ν, то есть дополнительное расслоение $\nu^\perp$, для которого $\mu = \nu \oplus \nu^\perp$. Здесь предполагается, что подпространства $\nu(x)$ и $\nu^\perp(x)$ непрерывно зависят от точки $x \in X$.

Это похоже на ситуацию с представлениями конечных групп. Там тоже у любого подпредставления есть дополнительное представления. Для представлений алгебр это уже не так.