Фейгин Б. Л.

Анализ на многообразиях

Второй курс. Осень 1998

1. Лекция 6

Докажем теорему о полной приводимости векторных расслоений, сформулированную на прошлой лекции. Её формулировка такова.

Теорема 1.1. *Пусть X — компакт, ξ — расслоение на X, ν — его подрасслоение. Тогда $\xi = \nu + \nu^{\perp}$.*

Если X — точка, то у нас просто есть подпространство $W \subset$. В таком случае дополнительное пространство $W^{\perp}$ можно построить многими разными способами. Один из этих способов таков. На $V \cong \mathbb{R}^n$ можно задать положительно определённую квадратичную форму и взять ортогональное дополнение. Если $V \cong \mathbb{C}^n$, то на $\mathbb{C}^n$ нужно задать эрмитову форму. Нашу теорему тоже можно доказывать разными способами, но мы выберем именно этот способ доказательства.

Нам нужно провести такую конструкцию в каждой точке $x \in X$.

Определение. *Пусть ξ — векторное расслоение. Говорят, что на ξ задана метрика, если на любом слое ξ_x задана невырожденная квадратичная форма. (Для комплексных расслоений — эрмитова форма.)*

Теорема немедленно вытекает из следующей леммы.

Лемма. *Если на компактном пространстве X есть вещественное векторное расслоение ξ, то на этом расслоении существует положительно определённая метрика.*

Доказательство. Пространство X покрыто множествами U_i, на которых расслоение тривиально: $\pi^{-1}(U_i) = U_i \times \mathbb{R}^n$. Выберем на $\mathbb{R}^n$ квадратичную форму $x_1^2 + \dots + x_n^2$. Чтобы построить метрику на расслоении, воспользуемся разбиением единицы. Разбиением единицы, подчинённым покрытию U_i, называют набор непрерывных функций $f_i \geq 0$, которые обращаются в нуль на $X \setminus U_i$ (ещё можно потребовать, что $f_i > 0$ на U_i) и $\sum f_i = 1$. Будем считать, что разбиение единицы есть.

На $U_i \times \mathbb{R}^n$ есть квадратичная форма s_i; продолжив её на ξ тождественным нулём, получим разрывную квадратичную форму. Но форма $f_i s_i$ непрерывна. Форма $\sum f_i s_i$ непрерывна и положительно определена, поскольку сумма положительно определённых форм с положительными коэффициентами положительна. □

Для доказательства нужно, чтобы X было компактно (или хотя бы паракомпактно). Тогда сумма $\sum f_i s_i$ конечна (или в каждой точке состоит из конечного числа ненулевых слагаемых).

Теорема 1.2. *Пусть X — компакт, ξ — векторное расслоение на X. Тогда существует такое расслоение ν, что расслоение $\xi \oplus \nu$ тривиально.*

Доказательство. Пусть X покрыто множествами U_i, над которыми расслоение тривиально; f_i — разбиение единицы; l — число множеств U_i.

Построим вложение $\xi_x \to \mathbb{R}^N$, где $N = ln$ $(n = \dim \xi)$. По условию $\pi^{-1}(U_i) = U_i \times \mathbb{R}^n$. Возьмём разрывное отображение $\lambda_i : \pi^{-1}(U_i) \to \mathbb{R}^n$ в i-е слагаемое суммы $\mathbb{R}^n \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}^n$; в остальных точках λ_i обращается в нуль. Отображение $f_i\lambda_i$ непрерывно, а отображение $\sum f_i\lambda_i$ является требуемым вложением (отображение $f_i\lambda_i$ является вложением над множеством U_i). $\square$

Возвращаемся к классификации комплексных расслоений над S^2. Одномерные комплексные расслоения над S^2 мы расклассифицировали в прошлый раз. Эти расслоения имеют вид ξ^n, $n \in \mathbb{Z}$ (здесь ξ — тавтологическое расслоение над $S^2 = \mathbb{C}P^1$).

Расслоение над S^2 задаётся отображением $\varphi : S^1 \to \mathbb{C}^*$. Число n соответствует тому, сколько раз наматывается S^1 на $\mathbb{C}^*$. Расслоение строится из $U_+ \times \mathbb{C}$ и $U_- \times \mathbb{C}$ склейкой точек (x, α) и (x, β), где $x \in E$ и $\beta = \varphi(x)\alpha$.

Будем теперь строить расслоение по-другому. Вырежем из S^2 два кружка: $S^2 = K_1 \bigcup K_2 \bigcup K_{12}$. Пусть заданы отображения $\varphi_1 : S^1 \to \mathbb{C}^*$ и $\varphi_2 : S^1 \to \mathbb{C}^*$. Склеим $K_1 \times \mathbb{C}$, $K_2 \times \mathbb{C}$ и $K_{12} \times \mathbb{C}$ друг с другом. А именно, для $X_1 = \partial K_1$ склеиваем точки (x, α) и (x, β), где $\alpha = \varphi_1(x)\beta$; для $X_2 = \partial K_2$ склеиваем точки (x, α) и (x, β), где $\alpha = \varphi_2(x)\beta$.

Упражнение. *Отображения φ_1 и φ_2 задают расслоение, которому соответствует число вращения n. С другой стороны, отображениям φ_1 и φ_2 соответствуют числа вращения n_1 и n_2. Доказать, что $n_1 + n_2 = n$ (при правильном выборе направления обхода X_1 и X_2).*

Теорема 1.3. *Рассмотрим на S^2 расслоения $\xi^{n_1} \oplus \xi^{n_2}$ и $\xi^{m_1} \oplus \xi^{m_2}$. Если $n_1 + n_2 \neq m_1 + m_2$, то эти расслоения разные.*

Для любого векторного расслоения ν можно построить расслоение $\Lambda^2\nu$. Применим эту конструкцию к $\xi^{m_1} \oplus \xi^{m_2}$. Получим векторное расслоение $\Lambda^2(\xi^{m_1} \oplus \xi^{m_2})$ размерности 1. Оказывается, что это расслоение изоморфно $\xi^{n_1+n_2}$. (Если это установлено, то теорема доказана.)

Для прямой суммы расслоений с функциями склейки $\varphi_1 : S^1 \to \mathbb{C}^*$ и $\varphi_2 : S^1 \to \mathbb{C}^*$ функция склейки имеет вид $\begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{pmatrix}$. Для тензорного произведения двух расслоений функция склейки имеет вид $\varphi_1(x) \otimes \varphi_2(x)$. Из тензорного произведения нужно вычленить кусок, отвечающий внешней степени Λ^2; несложно проверить что при этом получается функция перехода $\varphi_1(x)\varphi_2(x)$.

Для тензорных произведений правило действий такое:

$$(\xi^{n_1} \oplus \xi^{n_2}) \otimes (\xi^{n_1} \oplus \xi^{n_2}) = \xi^{2n_1} \oplus \xi^{n_1+n_2} \oplus \xi^{n_1+n_2} \oplus \xi^{2n_2}.$$

Для $V = \xi^{n_1} \oplus \xi^{n_2}$ разложению $V \otimes V = S^2 \oplus \Lambda^2 V$ соответствует разложение

$$(\xi^{n_1+n_2}) \oplus (\xi^{2n_1} \oplus \xi^{n_1+n_2} \oplus \xi^{2n_2}).$$

Обобщение теоремы таково: если $n_1 + \cdots + n_s \neq m_1 + \cdots + m_s$, то расслоения $\nu = \xi^{n_1} \oplus \cdots \oplus \xi^{n_s}$ и $\mu = \xi^{m_1} \oplus \cdots \oplus \xi^{m_s}$ разные. Доказательство то же самое: расслоению μ можно сопоставить одномерное расслоение $\Lambda^s\mu$; это расслоение изоморфно $\xi^{n_1+\cdots+n_s}$.

Лемма. *Пусть μ — расслоение размерности $l > 1$ на S^2. Тогда в μ есть тривиальное 1-мерное подрасслоение.*

Если лемма уже известна, то $\mu = \text{трив} \oplus \mu^{\perp}$. Если $\dim \mu^{\perp} > 1$, то процедуру можно повторить. В результате получим, что любое расслоение — сумма тривиального и одномерного: $\mu = \text{трив} \oplus \xi^n$. Пусть есть ещё расслоение $\nu = \text{трив} \oplus \xi^m$. Но $\mu = \xi^0 \oplus \cdots \xi^0 \oplus \xi^n$ и $\nu = \xi^0 \oplus \cdots \xi^0 \oplus \xi^m$. Если применить то рассуждение, которое было до формулировки леммы, то получим, что расслоения μ и ν могут быть изоморфны, только если $n = m$.

Если μ — расслоение размерности l, то можно образовать 1-мерное расслоение $\Lambda^l(\mu) = \xi^n$. Расслоение μ однозначно характеризуется числами l и n.

Расслоение $\Lambda^l(\mu)$ называют *детерминантом* расслоения μ.

Итак, у нас есть расслоение μ размерности $l \geq 2$ (на сфере S^2). Нужно доказать, что у него есть тривиальное 1-мерное расслоение, т.е. 1-мерное сечение, нигде не обращающееся в нуль.

Для простоты будем считать, что $l = 2$. На U_+ и U_- есть сечения s_1 и s_2. Из этих двух сечений, заданных на крае полоски $S^1 \times I$, нужно построить сечение на всей полоске.

Лемма. *Расслоение, ограниченное на полоску, тривиально.*

Полоска не стягиваема, но она является частью полусферы, а на самой полусфере расслоение тривиально, потому что полусфера стягиваема.

Расслоение над полоской Π тривиально: пространство расслоения гомеоморфно $\Pi \times \mathbb{C}^2$. Таким образом, на краях полоски заданы отображения $S^1 \to \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Нужно продолжить эти отображения на всю полоску. Всё сводится к тому, что $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) = \pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}) = \pi_1(S^3) = 0$.

Для любой римановой поверхности X справедлив такой факт: на X существует такое 1-мерное комплексное расслоение ξ, что любое 1-мерное расслоение на X есть ξ^n, $n \in \mathbb{Z}$. При этом любое l-мерное расслоение μ задаётся числом l и расслоением $\Lambda^l \mu$.

При доказательстве этого утверждения единственная проблема — построить хотя бы одно нетривиальное расслоение.

Классификация n-мерных комплексных расслоений на S^2 сводится к классификации отображений $S^1 \to GL_n(\mathbb{C})$. Расслоения мы расклассифицировали, и тем самым доказали, что $\pi_1(GL_n(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$.

При всех $n \geq 1$ отображение $GL_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$, заданное формулой $m \to \det m$, индуцирует изоморфизм $\pi_1(GL_n(\mathbb{C})) \to \pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$. Прообраз элемента $1 \in \mathbb{C}^*$ — это группа $SL_n(\mathbb{C})$. Таким образом, $\pi_1(SL_n(\mathbb{C})) = 0$. Этот факт можно проверить и непосредственно.