Фейгин Б. Л.

Анализ на многообразиях

Второй курс. Осень 1998

1. Лекция 7

1.1. Интегрирование на многообразиях

Простейший пример, который мы будем рассматривать, $M = S^1$. Пока немножко порассуждаем, что нужно интегрировать по многообразию и что такое интеграл.

Пусть окружность разбита на отрезки точками $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Мы хотим построить интегральную сумму. У каждого отрезка есть длина. Длина отрезка — это функция, зависящая от его концов. Поэтому, чтобы что-то интегрировать, рассмотрим функцию $f : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}$ и назовём $f(a_1, a_2) + f(a_2, a_3) + \cdots + f(a_n, a_1)$ интегральной суммой. Нужно, чтобы при измельчении разбиения интегральная сумма стремилась к пределу. В частности, нужно, чтобы $f(a_i, a_{i+1})$ стремилось к нулю при $a_i \to a_{i+1}$. Поэтому наложим следующие требования на функцию f:

Требование 0. Функция f бесконечно дифференцируемая.

Требование 1. $f(a, a) = 0$ для всех $a \in S^1$.

Посмотрим, от чего будет зависеть интеграл. Фиксируем ε и зададим набор точек $a_1, a_2, \ldots, a_N$ так, что расстояние от a_i до a_{i+1} меньше ε и расстояние от a_N до a_1 тоже меньше ε. Рассмотрим интегральную сумму $\sum f(a_i, a_{i+1})$ и устремим ε к нулю. Можно заключить, что интегральные суммы сходятся к некоторому пределу.

Предположим, что помимо условия $f(a, a) = 0$ выполняется ещё и условие $f'_a(a, a) = 0$. Тогда $f(a,\, a+\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$. Если разбить окружность на N равных частей, то интегральная сумма будет иметь порядок $1/N$, а значит, интегральные суммы стремятся к нулю.

Итак, если $f(a, a) = 0$ и $f'_a(a, a) = 0$, то интегральные суммы стремятся к нулю. Из этого следует, что предел интегральных сумм для функции $f(a, b)$ зависит только от функции $f'_a(a, a) = u(a)$. Этот предел мы будем обозначать $\int u(a)da$.

Рассмотрим в $C^\infty(S^1 \times S^1)$ идеал J, состоящий из функций, обращающихся в нуль на диагонали $S^1 = \{(a, a) \in S^1 \times S^1\}$, т.е. $f(a, a) = 0$. Рассмотрим, далее, идеал J^2, порождённый произведениями $f_1 f_2$, где $f_1, f_2 \in J$. Идеал J^2 состоит из таких функций g, что $g(a, a) = 0$ и $\frac{\partial g}{\partial a}(a, a) = 0$. Это доказывается точно так же, как лемма Адамара.

Приведённая выше конструкция даёт отображение $\int : J \to \mathbb{R}$ (функции $f(a, b)$ сопоставляется предел интегральных сумм). При этом $\int : J^2 \to 0$. Таким образом, $\int$ — отображение $J/J^2 \to \mathbb{R}$.

Упражнение. *Пусть функция $f(a, b)$ такова, что $f(a, a) = 0$ и $f(a, b) = f(b, a)$. Доказать, что интеграл от такой функции равен нулю.*

Чтобы это доказать, введем локальную координату φ на окружности. Функцию $f(\varphi_1, \varphi_2)$ запишем в координатах $x = \varphi_1 + \varphi_2$ и $y = \varphi_1 - \varphi_2$. Теперь значение на диагонали равно $f(x, 0) = 0$. Запишем ряд Тэйлора: $f(x, y) = f(x, 0) + y f'_y(x, 0) + \cdots$

В новых координатах симметричность функции означает, что $f(x,y) = f(x,-y)$. Из этого следует, что $f'_y(x,0) = 0$. Возвращаясь к исходным переменным, получаем $\frac{\partial f}{\partial a}(a,a) = 0$. В таком случае интеграл равен нулю.

Это вычисление показывает, что если симметричная функция обращается на диагонали в нуль, то она обращается в нуль два раза (терминология здесь такая: если $f \in J^2$, то говорят, что f обращается в нуль на диагонали два раза).

На симметрических функциях интеграл обращается в нуль, поэтому его разумно рассматривать на кососимметрических функциях. Такие функции, кстати сказать, автоматически обращаются в нуль на диагонали.

Пусть Dif — группа автоморфизмов окружности S^1. Каждый автоморфизм $d : S^1 \to S^1$ действует на функциях на окружности: $(d^*f)(a) = f(d(a))$. На функциях от двух переменных тоже можно определить действие $d^*f(a,b) = f(da, db)$. Ясно, что если $f \in J$, то $d^*f \in J$. Если $f \in J^2$, то $d^*f \in J^2$ — это уже требует проверки. Но легко проверить и более общий факт: условие $f \in J^n$ эквивалентно тому, что $f(a,a) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial a}(a,a) = 0, \ldots \frac{\partial^{n-1} f}{\partial a^{n-1}}(a,a) = 0$; с помощью теоремы о производной сложной функции можно показать, что для функции $d^*(f)$ выполняется такой же набор равенств.

Как следствие получаем, что группа диффеоморфизмов действует на J/J^2.

Теорема 1.1. *Интеграл $\int : J/J^2 \to \mathbb{R}$ инвариантен относительно действия группы диффеоморфизмов.*

Переформулировка этого утверждения такова: если $f \in J$, то $\int f = \int d^*f$.

Это вытекает из определения. Наметим лишь, что нужно проверить. Интегральные суммы $\sum f(a_i, a_{i+1})$ сходятся, т.е. существует число $\int f \in \mathbb{R}$, которое обладает таким свойством. Для любого $\delta > 0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что если имеется произвольное разбиение с длинами отрезков меньше ε, то отличие интегральной суммы от числа $\int f \in \mathbb{R}$ меньше δ. Отображение d равномерно непрерывно, поэтому d сохраняет мелкость разбиения, а значит, интегральные суммы для функций f и d^*f отличаются меньше, чем на 2δ.

1.2. Интеграл на S^2

Как обобщается эта конструкция на двумерную сферу S^2? Сферу S^2 нужно триангулировать. При построении интегральных сумм $\sum f(a_i, a_{i+1})$ мы использовали ориентацию окружности. При изменении ориентации интеграл изменяет знак. Действительно, $\int (f(a,b) + f(b,a)) = 0$, потому что функция $f(a,b) + f(b,a)$ симметрична.

Триангуляция сферы означает, что есть вершины v_i, рёбра v_iv_j и грани $v_iv_jv_k$. Ориентация — это согласованное задание направления обхода граней (треугольников). Согласованность означает, что ребро, принадлежащее двум соседним граням, при обходе этих граней должно проходиться в разных направлениях.

В духе того, что говорилось, при построении интеграла сначала каждому треугольнику нужно сопоставить число, а затем все числа нужно сложить. Пусть $f(a_1, a_2, a_3)$ — функция на $S^2 \times S^2 \times S^2$. Мы будем рассматривать интегральные суммы $\sum f(a_1, a_2, a_3)$, где суммирование ведётся по всем треугольникам триангуляции.

Требование будет такое: функция f кососимметрична по всем трём переменным. В частности, $f(a,a,a) = 0$. Интегральная сумма зависит от триангуляции и от выбора ориентации. А именно, интегральная сумма — это суммы $\sum f(v_1, v_2, v_3)$, где суммирование ведётся по всем треугольникам и вершины v_1, v_2, v_3 выбраны в том порядке, который отвечает ориентации треугольника. Интеграл — это предел интегральных сумм. Если диаметр любого треугольника триангуляции меньше δ, то интегральные суммы для таких триангуляций отличаются меньше, чем на ε. Это уже нужно доказывать.

Попробуем выяснить, зачем нужна кососимметричность функции. Рассмотрим симметричную функцию. Тогда ориентация не нужна, и можно просто рассмотреть сумму $\sum f(v_1, v_2, v_3)$. (Требование $f(a,a,a) =$ остаётся.) То же самое рассуждение, что и для окружности, здесь тоже показывает, что такой интеграл равен нулю. Это остаётся в качестве задачи.

Вернёмся к случаю окружности. В пространстве функций на $S^1 \times S^1$ есть идеал J и в нём есть идеал J^2. Аналогичные идеалы можно рассмотреть и для произвольного гладкого многообразия M.

Предложение. *Для многообразия M векторное пространство J/J^2 совпадает с пространством сечений кокасательного расслоения, т.е. с пространством 1-форм.*

Итак, есть идеал $J \subset C^\infty(M \times M)$ и есть диагональ $M \subset M \times M$. Рассмотрим подмногообразие $m \times M = \{m, x\}$, $x \in M$; здесь точка m фиксирована. Сузим идеал J на $m \times M$. Получим функции $f(m,x) \in C^\infty(M)$, для которых $f(m,m) = 0$. Такие функции лежат в идеале $J_m \subset C^\infty(M)$, состоящем из функций, обращающихся в нуль в точке m. Кокасательное пространство в точке m — это J_m/J_m^2.

Если $f \in J^2$, то $f(m,x) \in J_m^2$. Пусть $\Pi_m : J \to J_m$ — оператор подстановки, который сопоставляет функции f функцию $f(m,x)$. Ясно, что $\Pi_m(J^2) \subset J_m^2$. Поэтому $\Pi_m : J/J^2 \to J_m/J_m^2$. Итак, по функции $f \in J/J^2$ для каждой точки $m \in M$ построен элемент J_m/J_n^2. Это и есть сечение, построенное по $f \in J/J^2$. Бесконечную дифференцируемость этой зависимости проверить очень легко. Нужно ещё проверить, что ни один элемент в нуль не переходит и все элементы так получаются. Это несложно, но сейчас мы это делать не будем.

Проведём ещё одно вычисление для окружности. Возьмём на окружности функцию $g(a)$ от одной переменной и построим по ней функцию $f(a,b) = g(a) - g(b)$ от двух переменных. Эта функция кососимметрическая. Для неё любая интегральная сумма равна нулю, поэтому интеграл тоже равен нулю.

Напомню, что для любой функции $f(a,b) \in J$ интеграл зависит только от $\frac{\partial f}{\partial a}(a,a) = u(a)$. Если $f(a,b) = g(a) - g(b)$, то $u(a) = g'(a)$. Это согласуется с тем, что интеграл от производной равен нулю.

Пусть теперь M — произвольное многообразие и $f(m_1, m_2) \in J$. Функцию f по всему многообразию интегрировать нельзя. Но если есть отображение $\varphi : S^1 \to M$, то f можно проинтегрировать по окружности. Для этого нужно рассмотреть разбиение окружности и взять интегральную сумму $\sum f(\varphi(a_i), \varphi(a_{i+1}))$.