Фейгин Б. Л.

Анализ на многообразиях

Второй курс. Осень 1998

1. Лекция 8

1.1. Интегрирование на плоскости $\mathbb{R}^2$

Чтобы определить интегральную сумму, нам нужна триангуляция плоскости. Мы будем говорить, что триангуляция мелкая (точнее, $\leq \varepsilon$), если диаметр любого треугольника триангуляции не превосходит ε.

Кроме того, на триангуляции должна быть задана ориентация, т.е. задан порядок обхода вершин каждого треугольника.

Это были данные, по которым мы будем интегрировать. Теперь — что именно мы будем интегрировать. Интегрировать мы будем функцию $f(X_1, X_2, X_3)$, $X_i \in \mathbb{R}^2$, которая обладает следующими свойствами:

а) функция f кососимметрическая;

б) функция f бесконечно дифференцируемая;

в) функция f финитная, т.е. $f(X_1, X_2, X_3) = 0$, если $|X_i| > R$ для некоторого i.

В таком случае можно определить интегральную сумму $\sum f(X_1, X_2, X_3)$, где суммирование ведётся по всем треугольникам и X_1, X_2, X_3 — вершины треугольника, записанные в положительном порядке. Интегральная сумма зависит от функции и от триангуляции. Стандартное рассуждение показывает, что интегральные суммы сходятся к интегралу $\int f$. Это означает, что существует такое число $\int f$, что разность между $\int f$ и интегральной суммой стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Определим теперь интеграл по области U. Снова должна быть функция $f(X_1, X_2, X_3)$ с теми же самыми свойствами; область U триангулирована (стороны треугольников при этом не обязательно прямые, но сами треугольники обязательно должны быть маленькими). В интегральную сумму входят только треугольники, лежащие в области. Так получаем интеграл по области $\int_U f$.

В случае плоскости можно определить интеграл по контуру. Контур — это образ ориентированной окружности. Контур разбиваем точками $a_1, \ldots, a_N$. Триангуляция снова мелкая. Интегрируем кососимметрическую функцию от двух переменных $g(X_1, X_2)$. Интегральная сумма равна $\sum g(a_i, a_{i+1})$. Предел интегральных сумм — интеграл по контуру $\int_K g$.

На плоскости есть три определения интеграла.

1) Функцию $f(X)$, $X \in \mathbb{R}^2$ можно интегрировать «по точке» P; интеграл — это значение $f(P)$.

2) Кососимметрическую функцию $f(X_1, X_2)$, $X_i \in \mathbb{R}^2$ можно интегрировать по контуру. Определение было дано для замкнутого контура, но точно так

же можно рассмотреть и интеграл по незамкнутому контуру. Незамкнутый контур мы будем называть циклом.

3) Кососимметрическую функцию $f(X_1, X_2, X_3)$, $X_i \in \mathbb{R}^2$ можно интегрировать по области или по всей плоскости.

При изменении ориентации цикла изменяется знак интегральной суммы. Интеграл по области тоже меняет знак при изменении ориентации триангуляции.

1.2. Формула Стокса

Для функции $f(X)$, $X \in \mathbb{R}^2$ определим дифференциал $\delta f(X_1, X_2) = -f(X_1) + f(X_2)$ (это определение не совсем стандартное, поэтому пишем δ). Очевидно, что

$$\int_I \delta f = f(\text{конец}) - f(\text{начало}) = \int_{\text{конец}} f - \int_{\text{начало}} f.$$

Если есть функция $f(X_1, X_2)$ и D — область с границей Γ, то

$$\int_\Gamma f(X_1, X_2) = \int_D \delta f(X_1, X_2, X_3),$$

где $\delta f(X_1, X_2, X_3) = f(X_1, X_2) - f(X_1, X_3) + f(X_2, X_3)$. Это легко проверяется: все члены, которые соответствуют сторонам, лежащим внутри области, сокращаются.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ «объект» типа j — это кососимметрическая функция от $j+1$ переменных $f(X_1, \ldots, X_{j+1})$, $X_\alpha \in \mathbb{R}^n$. Пространство таких функций обозначим K_j.

Имеется операция (дифференциал) $\delta : K_j \to K_{j+1}$, заданная формулой

$$\delta f(X_1, \ldots, X_{j+2}) = \sum_{k=1}^{j+2} (-1)^{k+1} f(X_1, \ldots, \hat{X}_k, \ldots, X_{j+2})$$

(здесь имеется в виду, что член X_k выброшен). Легко проверить, что $\delta^2 = 0$, т.е. $\delta(\delta f) = 0$.

Объекты типа 0 интегрируются по 0-циклам; 0-цикл — это формальная сумма $u = \sum \alpha_i P_i$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$ и $P_i \in \mathbb{R}$. При этом

$$\int_u f = \sum \alpha_i f(P_i).$$

Кососимметрические функции $f(X_1, X_2)$ интегрируются по 1-циклам; 1-цикл — это формальная сумма $u = \sum \beta_i q_i$, где $\beta_i \in \mathbb{R}$ и q_i — отображения отрезков с ориентациями ($-q_i$ — это тот же самый отрезок, но с изменённой ориентацией). При этом

$$\int_u f = \sum \beta_i \int_{q_i} f.$$

Формула Стокса теперь переписывается так:

$$\int_I \delta f = \int_{\partial I} f,$$

где $\partial I =$ конец $-$ начало.

Кососимметрические функции $f(X_1, X_2, X_3)$ в $\mathbb{R}^n$ интегрируются по 2-циклам. Чтобы определить 2-цикл, рассмотрим диск D в $\mathbb{R}^2$; ориентация диска стандартная. Пусть $\varphi_i : D \to \mathbb{R}^n$ — дифференцируемое отображение. 2-цикл — это формальная линейная комбинация $\sum \gamma_i \varphi_i$. При этом

$$\int_U f = \sum \gamma_i \int_{\varphi_i} f.$$

Интеграл по φ_i определяется так. Для D рассматриваем мелкую триангуляцию; X_j — вершины этой триангуляции. Для них определены точки $\varphi_i(X_j) \in \mathbb{R}^n$, поэтому можно рассмотреть интегральную сумму, беря значения функции f в этих точках. Можно сделать и по-другому: взять функцию f и перенести её на D. Это абсолютно то же самое.

Вернёмся к $\mathbb{R}^2$. Пусть есть область D в $\mathbb{R}^2$; ∂D — граница этой области. Если есть кососимметрическая функция $f(X_1, X_2)$, то $\int_D \delta f = \int_{\partial D} f$. Циклу D ставится в соответствие его граница ∂D.

Пусть теперь есть область $S \subset \mathbb{R}^n$ и кососимметрическая функция $f(X_1, \ldots, X_{n+1})$. Область $S \subset \mathbb{R}^n$ нужно триангулировать. Это означает, что S нужно разбить на симплексы. Точки $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$ — вершины этих симплексов. Выделены такие наборы $n+1$ индексов, что $\{Y_{\alpha_0}, \ldots, Y_{\alpha_n}\}$ — вершины симплекса. Ориентация симплекса $\{Y_{\sigma(\alpha_0)}, \ldots, Y_{\sigma(\alpha_n)}\}$ с переставленными вершинами равна $(-1)^\sigma$ (если ориентация исходного симплекса положительна). Ориентации разных симплексов согласованы в следующем случае. Если есть два симплекса с общей $(n-1)$-мерной гранью, то общие вершины расположить в одном и том же порядке, поставив при этом вершины, противоположные общей грани, в конце. Ориентации таких симплексов должны быть разного знака.

Интегральная сумма от кососимметрической функции $f(X_1, \ldots, X_{n+1})$ по триангуляции с данной ориентацией равна сумме по симплексам $\sum f(\text{от вершин симплекса})$, где вершины расположены в порядке, соответствующем положительной ориентации. Чтобы получит интеграл, нужно перейти к пределу.

Если в $\mathbb{R}^3$ есть область D и есть кососимметрическая функция $f(X_1, X_2, X_3)$, то $\int_D \delta f = \int_{\partial D} f$. Все внутренние члены снова сокращаются.

Займёмся теперь вопросом о том, какие объекты мы на самом деле интегрируем. Сначала рассмотрим $\mathbb{R}^2$ и кососимметрическую функцию $f(X_1, X_2, X_3)$.

Предложение. *Интеграл $\int f$ зависит только от частных производных $\frac{\partial f}{\partial X_1^\alpha}(X, X, X)$ $(\alpha = 1,\, 2)$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial X_i^\alpha \partial X_j^\beta}(X, X, X)$ $(\alpha,\, \beta = 1,\, 2)$.*

Если есть функция $f(X_1, X_2, X_3)$, то тот объект, от которого на самом деле зависит интеграл, называется 2-формой. 2-форма строится по функции f; она имеет вид $u(x_1, x_2)dx_1 \wedge dx_2$ и интеграл от функции f по области D равен обычному интегралу от функции u по области D. Для определения интеграла функция f от трёх переменных избыточна, но с её помощью удобно доказывать формулу Стокса.