Фейгин Б. Л.

Анализ на многообразиях

Второй курс. Осень 1998

1. Лекция 9

Пусть M — компактное n-мерное ориентированное многообразие, возможно с краем. Тогда если задана функция $f(X_1,\dots,X_{n+1})$, где $X_i\in M$, с теми же свойствами, что и были: кососимметричность, гладкость и т.д. Тогда эту функцию можно проинтегрировать по M, действуя точно так же, как и в случае $\mathbb{R}^n$: рассмотреть достаточно мелкое разбиение на ориентированные симплексы, и т.д.

Пусть теперь есть функция $f(X_1,\dots,X_{j+1})$, $X_i\in M$, $j\le n$. Такую функцию можно проинтегрировать вот по чему. Пусть N — компактное j-мерное ориентированное многообразие, тоже возможно с краем. Пусть, далее, имеется гладкое отображение $\varphi: N\to M$. Представлять это можно так, что многообразие N лежит в большем многообразии M. Тогда функцию f можно проинтегрировать по N. А именно, функцию f можно перенести на N:

$$(\varphi^* f)(n_1,\dots,n_{j+1}) = f(\varphi(n_1),\dots,\varphi(n_{j+1})).$$

Затем триангулируем N и вычисляем интегральные суммы.

Утверждение, которое называлось в прошлый раз формулой Стокса, теперь выглядит так. Пусть M — компактное ориентированное многообразие с краем ∂M, $f(X_1,\dots,X_n)$ — функция от n переменных. На крае есть ориентация, поэтому f можно проинтегрировать по ∂M. С другой стороны, можно вычислить функцию $\delta f(X_1,\dots,X_{n+1})$ и проинтегрировать её по M. Формула Стокса утверждает, что $\int_{\partial M} f = \int_M \delta f$. Доказательство то же самое, что было на прошлой лекции.

Пусть M — многообразие с краем или без края (не обязательно ориентированное). Рассмотрим пространство всех кососимметрических функций $f(X_1,\dots,X_{j+1})$ и обозначим его $K^j(M)$. Рассмотрим в нём подпространство $L^j\subset K^j(M)$, которое определяется следующим образом: $f\in L^j$, если интеграл от f по любому отображению $\varphi: N\to M$ $(\dim N = j)$ равен нулю. Тогда факторпространство $K^j(M)/L^j$ — это то, что существенно для интегрирования. Это пространство называют пространством j-форм на многообразии M.

Предложение. *Условие $f\in L^j$ эквивалентно следующему условию. Пусть бесконечно дифференцируемое отображение $\theta: I=[0,1]\to M\times M\times\dots\times M$ (j раз) таково, что $\theta(0)=(a,a,\dots,a)$, $a\in M$. Тогда $f(\theta(t))\sim o(t^j)$.*

Объяснить это можно так. Достаточно ограничиться случаем, когда N — j-мерный диск. Число симплексов разбиение растёт как p^j, где $1/p$ — размер симплекса. Из этого следует, что интегральная сумма стремится к нулю при $1/p\to 0$. Обратное утверждение тоже можно доказать.

Ясно, что $L^0=0$.

Утверждение. *а) $L^{n+1}=K^{n+1}$. Иными словами, если на M есть функция от более чем $n+1$ переменных, то интеграл от нее по какому угодно отображению $\varphi: N\to M$ равен нулю.*

б) $\delta(L^j)\subset L^{j+1}$.

Это означает, что имеется последовательность:

$$K^0/L^0 \xrightarrow{\delta} K^1/L^1 \xrightarrow{\delta} K^2/L^2 \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} K^n/L^n \xrightarrow{\delta} 0.$$

Эту последовательность называют комплекс де Рама.

1.1. Стандартное описание комплекса де Рама

Пространство $\Omega^0 = K^0/L^0$ — это 0-формы. Здесь K^0 — функции на многообразии и $L^0 = 0$. Поэтому Ω^0 — функции на многообразии.

Комплекс де Рама — это набор пространств $\Omega^0, \Omega^1, \ldots, \Omega^n$, который обладает следующими свойствами:

1) Ω^0 — функции на многообразии.

2) Имеется дифференциал $d : \Omega^i \to \Omega^{i+1}$.

3) $d^2 = 0$, т.е. композиция отображений

$$\Omega^i \xrightarrow{d} \Omega^{i+1} \xrightarrow{d} \Omega^{i+2}$$

равна нулю.

Дальше идут свойства, которые непосредственно из конструкции не вполне очевидны.

4) На пространстве форм есть умножение $\Omega^i \times \Omega^j \to \Omega^{i+j}$. (Произведение форм α и β будем обозначать $\alpha \wedge \beta$.) На Ω^0 это умножение функций. Умножение коммутативно в $\mathbb{Z}_2$-смысле (или в суперсмысле). Это означает, что если $\alpha \in \Omega^i$ и $\beta \in \Omega^j$, то $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$ в том случае, когда i и j нечётны, а во всех остальных случаях $\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha$.

5) Дифференциал де Рама является супердифференцированием:

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta \pm \alpha \wedge d\beta.$$

Если $\alpha \in \Omega^j$, то при чётном j берётся знак плюс, а при нечётном j берётся знак минус.

Элементы Ω^1 можно умножать на функции, т.е. Ω^1 является Ω^0-модулем. Отображение $d : \Omega^0 \to \Omega^1$ удовлетворяет правилу Лейбница: $d(fg) = fdg + gdf$. В Ω^1 есть элементы df. Если есть функции $f_1, \ldots, f_n$ и $g_1, \ldots, g_n$, то можно образовать $\sum g_i df_i$. Пространство, порождённое элементами $\sum g_i df_i$, нужно отфакторизовать по подпространству, порождённому элементами $h_1 dh_2 + h_2 dh_1$. Отфакторизованное пространство удовлетворяет всем условиям; назовём его Ω^1.

Применим эту конструкцию не к Ω^0, а к $\mathbb{R}[x]$. Тогда получим $\Omega^1 = \mathbb{R}[x]dx$ и при этом $f \mapsto f'dx$. Для многочленов от многих переменных

$$\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_m] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_m]dx_1 + \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_m]dx_2 + \cdots$$

При этом $f \mapsto \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.

Упражнение. *Вычислить* $\mathbb{R}[x_1, x_2]/(x_1^2 + x_2^2 - 1)$.

Установим теперь, что такое 2-формы. Для $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_m]$ пространство 1-форм Ω^1 состоит из элементов вида $\sum f_i dx_i$. Умножение $\Omega^1 \times \Omega^1 \to \Omega^2$ кососимметрично. Кроме того, Ω^2 должно быть Ω^0-модулем. При этом $f(\omega_1 \wedge \omega_2) = f(\omega_1) \wedge \omega_2$. Из этого следует, что любой элемент из Ω^2, являющийся линейной комбинацией произведений, имеет вид $f_{ij} dx_i \wedge dx_j$.

Комплекс де Рама Ω^* полиномиальных форм на $\mathbb{R}^n$ можно определить так:

а) $\Omega^0 = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_m]$;

б) $dx_1, \ldots, dx_n \in \Omega^1$;

в) $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$;

г) любой элемент из Ω^* имеет вид $\sum fi_1 \ldots i_s dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_s}$, где $fi_1 \ldots i_s$ — многочлен и $i_1 < i_2 < \ldots < i_s$.

Из кососимметричности следует, что $dx_i \wedge dx_i = 0$.

Вычисление дифференциала начинается так: $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. Дальше получаем

$$\begin{aligned} d(\sum f_j dx_j) &= \sum (df_j) \wedge dx_j + \sum df_j \wedge d(dx_j) = \\ &= \sum_{k,\,j} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_j = \sum_{k<j} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right) dx_k \wedge dx_j. \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что $d(dx_j) = 0$. Дальнейшие вычисления аналогичны. Основные правила таковы:

$$\begin{aligned} d(dx_1 \wedge dx_2) &= 0; \\ d(P dx_1 \wedge dx_2) &= \sum_k \frac{\partial P}{\partial x_k} dx_k \wedge x_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

Скажем то же самое по-другому. Пространство Ω^0 — это многочлены от переменных $x_1, \ldots, x_n$. В комплексе де Рама ещё есть элементы $dx_1, \ldots, dx_n$; они косокоммутируют и порождают грассманову алгебру. Грассманова алгебра похожа на алгебру многочленов, но эти многочлены от антикоммутирующих переменных. Всё образование можно записать так:

$$\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n, dx_1, \ldots, dx_n]$$

Здесь переменные $x_1, \ldots, x_n$ коммутируют друг с другом, переменные $dx_1, \ldots, dx_n$ антикоммутируют друг с другом, а переменные x_i и dx_j попарно коммутируют друг с другом. В таких случаях говорят, что переменные x_i чётные, а переменные dx_j нечётные.

На этом образовании задаётся супердифференцирование. Это нужно понимать так. Если есть просто $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, то векторное поле (дифференцирование) — это линейное отображение $l : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, обладающее свойством $l(ab) = al(b) + l(a)b$. Любое такое дифференцирование имеет вид $l = \sum u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Для грассмановой алгебры $\Lambda^*(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ есть аналогичное понятие дифференцирования. Грассманову алгебру можно разложить на чётную и нечётную часть (в зависимости от чётности числа элементов ξ_i, входящих в произведение):

$$\Lambda^*(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \Lambda^{*\,odd} \oplus \Lambda^{*\,even}$$

Для любой алгебры A линейное отображение $l : A \to A$ называют дифференцированием, если $l(ab) = al(b) + l(a)b$. Дифференцирование $l : \Lambda^* \to \Lambda^*$ называют чётным, если $\Lambda^{*\,odd} \to \Lambda^{*\,odd}$ и $\Lambda^{*\,even} \to \Lambda^{*\,even}$. Нечётное дифференцирование грассмановой алгебры определяется так. Во-первых, $\Lambda^{*\,odd} \longleftrightarrow \Lambda^{*\,even}$. Кроме того, выполняется условие $l(ab) = al(b) \pm l(a)b$, где знак плюс берётся для чётного a и знак минус берётся для нечётного a.

На алгебре $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$, где x_i — чётные координаты, а ξ_i — нечётные, есть дифференцирование

$$d\omega = \sum_i \xi_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i},$$

где $\omega = P(x)\xi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_k}$. Это можно мыслить как векторное поле на алгебре $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$.

Дифференцирование d меняет чётность (увеличивает число ξ_i на 1). При этом

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 \pm \omega_1 \wedge d\omega_2,$$

где знак $\pm$ зависит от чётности ω_1. Такого сорта объект и называется нечётным дифференцированием, или нечётным векторным полем.

При записи

$$\omega \to \sum \xi_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \to \sum \xi_i \xi_j \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i \partial x_j}$$

очевидно, что $d^2 = 0$.

Комплекс де Рама на $\mathbb{R}^n$ устроен так. Рассматриваются функции $f(x_1, \ldots, x_n, dx_1, \ldots, dx_n)$, гладкие по $x_1, \ldots, x_n$; переменные dx_i антикоммутирующие. Рассматриваются выражения

$$\sum f i_1 \ldots i_s dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_s}$$

, где $f i_1 \ldots i_s$ теперь уже не многочлен, а любая гладкая функция. Формула

$$d\omega = \sum_i \xi_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i},$$

сохраняется. Снова выполняется равенство $d^2 = 0$. Теперь у нас есть описание комплекса де Рама на $\mathbb{R}^n$.