НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ

Математический анализ 1-й курс 6 декабря 1998 года

Письменный экзамен

1. Если последовательность a_n сходится, то и последовательность b_n, где
$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$
тоже сходится, и их пределы равны.

2. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, где $a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n + a_{n-1}, a_0 = a_1 = a_2 = 1$.

3. Отображение $f : M \longrightarrow M$ метрического пространста M в себя называется *сжимающим,* если существует такое число $c : 0 < c < 1$, что $\rho(f(x), f(y)) \leq c \cdot \rho(x, y)$ для любых $x, y \in M$.
   (a) Докажите, что сжимающее отображение непрерывно.
   (b) Докажите, что сжимающее отображение полного метрического пространства в себя имеет неподвижную точку, и притом только одну.
   (c) Приведите пример отображения полного метрического пространства в себя, удовлетворяющего условию $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$, без неподвижной точки.

4. Доказать неравенство Декарта: число различных положительных корней многочлена с N мономами не превосходит $N - 1$.

5. Вычислить предел:
$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{arctg}(\mathrm{sh} x) - \mathrm{sh}(\mathrm{arctg} x)}{x^7}.$$

6. Найти все непрерывные на $\mathbb{R}$ функции f, удовлетворяющие условию:
$$f(x) + f(2x) = 6x + 1.$$

7. Функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$ и удовлетворяет двум условиям:
   (a) существует такая постоянная M, что для всех $x \in \mathbb{R}$ и для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|f^{(n)}(x)| \leq M$;
   (b) $f(\frac{1}{n}) = 0, n \in \mathbb{N}$.

   Доказать, что $f(x) \equiv 0$.