Занятие 1

8 сентября 1998 г.

В дальнейшем буква X будет обозначать гладкое многобразие без края; $C(X)$ — алгебру непрерывных функций на нем (например, с действительными значениями); $C^\infty(X)$ — подалгебру $C(X)$, состоящую из бесконечно гладких функций. Алгебра $C^\infty(X)$ позволяет описать многие свойства многообразия X.

Любому непрерывному отображению многообразий $D : X \to Y$ сопоставим отображение $D^* : C(Y) \to C(Y)$, определенное формулой $(D^*(f))(x) = f(D(x))$.

Определение 1. Отображение D называется (бесконечно) гладким, если отображение D^* переводит гладкие функции в гладкие, т.е. отображает $C^\infty(Y)$ в $C^\infty(X)$.

Задача 1. Докажите, что отображение является гладким в смысле предыдущего определения тогда и только тогда, когда оно записывается набором гладких функций в какой-нибудь системе координат.

Задача 2. Докажите, что D^* — гомоморфизм алгебр.

Задача 3. Гладкие функции на $\mathbb{R}P^2$ это гладкие четные функции на сфере S^2. Докажите, что существует гладкое вложение $\mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$; иными словами, на $\mathbb{R}P^2$ существуют 4 гладких функции $f_1, \ldots, f_4$ такие, что $\forall x, y \in \mathbb{R}P^2 \exists i : f_i(x) \neq f_i(y)$.

Отображение называется *диффеоморфизмом*, если оно обратимое и гладкое вместе со своим обратным.

Каждой точке $p \in X$ можно сопоставить гомоморфизм $A_p : C^\infty(X) \to \mathbb{R}$, действующий по формуле $A_p(f) = f(p)$. Ядро этого гомоморфизма обозначается J_p.

Задача 4. Докажите, что J_p является максимальным идеалом в алгебре $C^\infty(X)$.

Задача 5. Докажите, что если X компактно, то всякий максимальный идеал в алгебре $C^\infty(X)$ имеет вид J_p для некоторого p, или, что эквивалентно, всякий гомоморфизм алгебр $C^\infty(X) \to \mathbb{R}$ имеет вид A_p.

Для решения предыдущей задачи необходима

Теорема 1 (о разбиении единицы) *Пусть $X = \bigcup_i U_i$ — произвольное покрытие многообразия X открытыми множествами такое, что всякая точка покрыта лишь конечным числом множеств. Тогда существуют функции $\varrho_i \in C^\infty(X)$, такие что $\varrho_i(x) \geq 0$, $\sum_i \varrho_i(x) \equiv 1$, и $\varrho_i(x) = 0$ при $x \notin U_i$.*

Таким образом, точки многообразия X соответствуют максимальным идеалам в алгебре $C^\infty(X)$.

Задача 6. Пусть $A \subset X$ — подмножество, состоящее более чем из одной точки. Докажите, что идеал J_A, состоящий из функций, обращающихся на A в нуль, не является простым.

Рассмотрим гладкое семейство диффеоморфизмов $D(t)$, $t \in (-1, 1)$ многообразия X, (т.е. гладкое отображение $\tilde{D} : X \times (-1,1) \to X$, ограничение которого на каждое подмногообразие вида $X \times a$ является дифффеоморфизмом этого многообразия в X), для которого $D(0) = \mathrm{Id}$. Оператор $L : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$, заданный формулой $L = \frac{d}{dt} D(t)\big|_{t=0}$, называется векторным полем, касательным (в нуле) к семейству диффеоморфизмов $D(t)$.

Задача 7. Докажите, что оператор L линеен и удовлетворяет тождеству Лейбница

$$L(fg) = fL(g) + L(f)g. \tag{1}$$

Задача 8. Вычислите векторные поля, соответствующие следующим семействам диффеоморфизмов:

1. $X = \mathbb{R}^1$, $D_t(x) = (1 + t)x$;
2. $X = S^2$, D_t — поворот на угол $2\pi t$ вокруг фиксированной оси (для записи ответа воспользуйтесь сферическими координатами).

Линейный оператор, удовлетворяющий тождеству Лейбница, назыввается *дифференцированием* алгебры. В дальнейшем L — произвольное дифференцирование.

Задача 9. Докажите, что $L(1) = 0$.

Задача 10. Докажите, что оператор L локален: если функция $f \in C^\infty(X)$ равна нулю в некоторой окрестности точки p, то $L(f)(p) = 0$.

Указание: Воспользуйтесь теоремой о разбиении единицы.

Пусть теперь $X = \mathbb{R}^n$.

Задача 11. Докажите, что всякое дифференцирование алгебры $C^\infty(X)$ задается формуой $L(f)(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

Для решения этой задачи Вам потребуется лемма Адамара: если функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такова, что $f(0) = 0$ и $\nabla f(0) = 0$, то найдутся функции $a_1(x), \ldots, a_n(x), b_1(x), \ldots, b_n(x)$ такие, что $a_1(0) = \ldots = a_n(0) = b_1(0) = \ldots = b_n(0)$ и $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x)b_i(x)$.

Задача 12. Докажите, что всякое дифференцирование алгебры $C^\infty(X)$ является векторным полем.

Задача 13. Используя утверждения задач 12 и 10, решите аналог задачи 12 для произвольного многообразия X.

Задача 14. Докажите, что если A и B — дифференцирования алгебры, то их коммутатор $[A, B] \stackrel{\mathrm{def}}{=} AB - BA$ также является дифференцированием.

Задача 15. Пусть векторные поля L_1 и L_2 соответствуют семействам диффеоморфизмов $D_1(t)$ и $D_2(t)$. Докажите, что коммутатор $[L_1, L_2]$ соответствует семейству диффеоморфизмов $D(t) = D_1(t)D_2(t)D_1^{-1}(t)D_2^{-1}(t)$.