Занятие 2

15 сентября 1998 г.

Касательным вектором к многообразию X в точке a называется линейный функционал $\nu : C^\infty(X) \to \mathbb{R}$, для которого $\nu(fg) = f(a)\nu(g) + \nu(f)g(a)$.

Касательный вектор ранее определялся как класс эквивалентности гладких кривых на многообразии X, где две кривые $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ эквивалентны, если $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a$ и расстояние между точками $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ есть $o(t)$ при $t \to 0$. Сопоставим касательному вектору γ в смысле этого определения линейный функционал $\nu_\gamma(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\big|_{t=0}$.

Задача 1. Докажите, что ν_γ — касательный вектор в смысле первого определения. Докажите, что ν_γ не меняется при замене кривой γ на эквивалентную.

Задача 2. Пусть ν — касательный вектор в смысле первого определения. Докажите, что если $f_1(x) - f_2(x)$ есть o от расстояния между точками x и a, при $x \to a$, то $\nu(f_1) = \nu(f_2)$.

Указание: Воспользуйтесь леммой Адамара.

Задача 3. Докажите, что касательные векторы в точке a образуют линейное пространство, размерность которого равна размерности многообразия. Точнее, в локальных координатах всякий касательный вектор есть $\nu(f) = \sum_{k=1}^n s_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ для некоторых $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}$.

Задача 4. Докажите, что всякий касательный вектор в смысле первого определения есть ν_γ для некоторой кривой γ.

Тем самым доказана эквивалентность двух определений касательного вектора.

Задача 5. Пусть L — векторное поле на X. Докажите, что функционал $\nu(f) = (L(f))(a)$ является касательным вектором в точке a, и что всякий касательный вектор получается таким образом.

Это означает, что векторные поля суть сечения векторного расслоения над многообразием (касательного), слой которого над точкой a состоит из всех касательных векторов.

Кокасательным вектором к многообразию X в точке a называется элемент векторного пространства J_a/J_a^2, где J_a — идеал в $C^\infty(X)$, состоящий из функций, обращающихся в нуль в точке a.

Задача 6. Докажите, что кокасательные векторы образуют линейное пространство размерности, равной размерности многообразия.

Пусть ν — касательный вектор, и f — произвольный элемент идеала J_a. Формула $\langle \nu, f\rangle = \nu(f)$ определяет билинейное спаривание между касательным и кокасательным пространством в точке a.

Задача 7. Докажите, что определение корректно, т.е. значение $\langle \nu, f\rangle$ зависит только от класса элемента f в факторе J_a/J_a^2 (т.е. не изменится при прибавлении к f элемента J_a^2).

Задача 8. Докажите, что спаривание невырожденно, и, следовательно, кокасательное пространство является двойственным к касательному.

Гладкая кривая γ на многообразии X называется интегральной кривой векторного поля L, если для $\forall a \in X$ кривая γ принадлежит классу эквивалентности касательного вектора $L(a)$ (в точке a).

Теорема (о существовании и единственности локального решения дифференциального уравнения) *Для каждого (гладкого) векторного поля L и любой точки $a \in X$ существует ровно одна, с точностью до замены параметра, интегральная кривая, проходящая через эту точку.*

Задача 9. Найдите явно интегральные кривые векторного поля $x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ на многообразии $\mathbb{R}^2$.

Задача 10. Пусть $D(t)$ — семейство диффеоморфизмов линейного пространства $\mathbb{R}^n$, целиком лежащее в группе $\mathrm{GL}(n)$. Найдите общий вид векторного поля, касательного к такому семейству. Вычислите явно коммутатор двух таких полей, и докажите, что он является полем такого же вида. Найдите неподвижные точки произвольного векторного поля такого вида, и нарисуйте возможные картины интегральных кривых различных полей (для $n = 1$ и $n = 2$).

Задача 11. Та же задача для группы $\mathrm{SO}(n)$.

Задача 12. Та же задача для аффинной группы $\mathrm{Aff}(n)$.

Задача 13. Та же задача для группы проективных преобразований проективной прямой $\mathrm{PGL}(1)$.

Указание: Обратите внимание на то, что на проективной прямой не существует глобальной системы координат. Рассмотрите стандартный атлас из двух карт, и напишите формулы в каждой из них (тем самым у каждого векторного поля будет два различных выражения в координатах).

Задача 14. Та же задача для аффинной группы плоскости Лобачевского.

Задача 15. Та же задача для группы $\mathrm{PGL}(n)$ проективных преобразований $\mathbb{R}P^n$.