Занятие 3

22 сентября 1998 г.

Пусть X — гладкое многообразие, $a \in X$ и $f \in C^\infty(X)$. Кокасательный вектор $f(x) - f(a) \in T^*_a X \stackrel{\text{def}}{=} J_a/J_a^2$ называется *дифференциалом функции f в точке a* и обозначается $df(a)$.

Задача 1. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — система координат в карте $U \subset X$. Докажите, что для каждого $a \in U$ кокасательные векторы $dx_1(a), \ldots, dx_n(a)$ составляют базис в кокасательном пространстве $T^*_a X$.

Кокасательным расслоением T^*X многообразия X называется векторное расслоение, слоем которого над точкой a служит пространство $T^*_a X$, а тривиализация определяется так: пусть $x_1, \ldots, x_n$ — система координат в карте $U \subset X$. Тогда произвольный элемент пространства $T^*_a X$ однозначно записывается в виде $v = \sum_{i=1}^n p_i dx_i(a)$. В качестве координат на T^*X примем теперь набор функций $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$. Тем самым T^*X наделено структурой $2n$-мерного многообразия, гладко расслоенного над X со слоем $\mathbb{R}^n$.

Задача 2. Пусть $x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n)$ — набор функций перехода на X. Напишите соответствующие функции перехода на T^*X.

Ответ: $x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $p_i' = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) p_j$.

Гладкие сечения кокасательного расслоения называются 1-*формами* на многообразии X. Из задачи 1 следует, что в координатах каждая 1-форма записывается как $\nu(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i(x_1, \ldots, x_n) dx_i$. Форма, сопоставляющая точке a кокасательный вектор $df(a)$, называется *дифференциалом функции f* и обозначается df.

Задача 3. Выпишите дифференциал функции f в координатах.

Пусть ν — 1-форма, а L — векторное поле. “Спаривая” касательный вектор $L(a)$ с кокасательным вектором $\nu(a)$, получим для каждой точки a число, т.е. функцию на X.

Задача 4. Докажите, что $\langle L, df \rangle = L(f)$.

Группа диффеоморфизмов многообразия X действует на алгебре $C^\infty(X)$ заменами координат: $(D^* f)(a) = f(D(a))$. Определим действие группы диффеоморфизмов на множестве векторных полей формулой $D_* N \stackrel{\text{def}}{=} D^* \circ N \circ (D^*)^{-1}$.

Задача 5. Проверьте, что $D_* N$ — действительно векторное поле (т.е. дифференцирование алгебры $C^\infty(X)$). Выпишите соответствующие формулы в координатах.

Задача 6. Пусть $D(t)$ — семейство диффеоморфизмов, для которого $(D^*)'(0) = L$. Докажите, что $\frac{d}{dt} D_*(t) N\big|_{t=0} = [L, N]$ для любого векторного поля N.

Таким образом векторные поля действуют на себе — коммутаторами.

Определим действие группы диффеоморфизмов на множестве 1-форм равенством $\langle D^* \nu, N \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \nu, D_* N \rangle$ для любого векторного поля N.

Задача 7. Пусть $D(t)$ — семейство диффеоморфизмов, для которого $(D^*)'(0) = L$. Докажите, что 1-форма $L(\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} D^*(t) \nu\big|_{t=0}$ зависит только от L и ν (а не от конкретного выбора семейства $D(t)$). Выпишите форму $L(\nu)$ в координатах.

Задача 8. Докажите, что $L(df) = dL(f) = d\langle df, L \rangle$.

Задача 9. Пусть $d\varphi$ — “угловая” 1-форма на окружности (дайте ее определение !). Докажите, что для нее имеет место формула $L(d\varphi) = d\langle d\varphi, L \rangle$, но она не имеет вида df ни для какой функции f. Приведите пример 1-формы ν, для которой $L(\nu) \neq d\langle \nu, L \rangle$.