Математический Колледж НМУ **Анализ, 3 семестр**

Листок 4

Расслоением (гладким) над базой — многообразием B со слоем — многообразием F называется многообразие E вместе с гладким отображением — проекцией $p: E \to B$, обладающей следующим свойством: для всякой точки $b \in B$ найдется ее окрестность $U \ni b$ и семейство диффеоморфизмов (тривиализация) $\lambda_x^U : p^{-1}(x) \to F$, $(x \in U)$ (т.е., "занумерованное" точками этой окрестности), непрерывно зависящих от точки $x \in U$.

Пусть U, V — две окрестности, и λ_x^U, λ_x^V — соответствующие тривиализации. Тогда на пересечении $U \cap V$ возникает семейство диффеоморфизмов слоя $\lambda_x^U(\lambda_x^V)^{-1} : F \to F$. Отображение, сопоставляющее точке $x \in U \cap V$ диффеоморфизм $\lambda_x^U(\lambda_x^V)^{-1}$, называется *отображением перехода* и обозначается $g_{UV} : U \cap V \to \mathrm{Diff}(F)$, где $\mathrm{Diff}(F)$ — группа диффеоморфизмов слоя.

Определение 1. Векторным расслоением ранга n с базой B называется расслоение, слой которого $F = \mathbb{R}^n$, и для которого существует такая система тривиализаций, что все отображения перехода принимают значение в группе $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n)$.

Определение 1′. Векторным расслоением ранга n с базой B называется расслоение, в каждом слое которого введена структура вещественного линейного пространства размерности n, гладко зависящая от слоя.

Задача 1. Докажите, что определения 1 и 1′ эквивалентны.

Вариации на ту же тему:

Определение 2. Комплексным векторным расслоением ранга n называется расслоение, слой которого $F = \mathbb{C}^n$, и для которого существует такая система тривиализаций, что все отображения перехода принимают значение в группе $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \subset \mathrm{Diff}(\mathbb{C}^n)$.

Определение 2′. Комплексным векторным расслоением ранга n называется расслоение, в каждом слое которого введена структура комплексного линейного пространства размерности n, гладко зависящая от слоя.

Определение 2″. Комплексным векторным расслоением ранга n называется вещественное векторное расслоение ранга $2n$, отображения перехода которого (для некоторой системы тривиализаций) принимают значения в группе $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$.

Задача 2. Докажите эквивалентность определений 2, 2′ и 2″.

Определение 3. $\mathrm{O}(n)$-расслоением называется вещественное векторное расслоение ранга n, отображения перехода которого (для некоторой системы тривиализаций) принимают значения в группе $\mathrm{O}(n) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Определение 3′. $\mathrm{O}(n)$-расслоением называется вещественное векторное расслоение ранга n, в каждом слое которого введено скалярное произведение, гладко зависящее от слоя.

Определение 3″. $\mathrm{O}(n)$-расслоением называется вещественное векторное расслоение ранга n, в котором выделено подрасслоение, слои которого — сферы размерности $n-1$ с центрами в нуле (соответствующего слоя векторного расслоения).

Задача 3. Докажите эквивалентность определений 3, 3′ и 3″.

В дальнейшем мы будем заниматься комплексными расслоениями ранга 1 над S^2.

Задача 4. Докажите, что задание тривиализации λ_x^U такого расслоения над множеством $U \subset S^2$ эквивалентно заданию над U сечения $s_U : U \to E$, не обращающегося в нуль.

Отождествим $S^2 = \mathbb{C}P^1$, и пусть $U = \{[z_0 : z_1] \mid z_0 \neq 0\}$ и $V = \{[z_0 : z_1] \mid z_1 \neq 0\}$ ($[z_0 : z_1]$ — однородные координаты). Над U и V всякое расслоение тривиально (лемма Фельдбау). Поэтому можно определить тривиализации λ_x^U и λ_x^V и отображение перехода $g_{UV} : U \cap V \to \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Тавтологическим расслоением над $\mathbb{C}P^1$ называется расслоение L_1, слой которого над точкой $[z_0 : z_1]$ — комплексная прямая в $\mathbb{C}^2$, заданная уравнением $z_1 x - z_0 y = 0$.

Задача 5. Введите тривиализации и вычислите отображение перехода g_{UV} для расслоения L_1.

Обобщение: слоем расслоения L_n над точкой $[z_0 : z_1]$ является комплексная прямая в $\mathbb{C}^2$, заданная уравнением $z_1^n x - z_0^n y = 0$.

Задача 6. Решите аналог задачи 5 для расслоения L_n.

Тензорным произведением векторных расслоений $E_1 \to B$ и $E_2 \to B$ с одной и той же базой называется расслоение, слоем которого является $F_1 \otimes F_2$, а отображение перехода между окрестностями U и V есть $g_{UV}(x) = g_{UV}^{(1)}(x) \otimes g_{UV}^{(2)}(x)$, где $g_{UV}^{(i)}$, $i = 1, 2$ — отображения перехода соответствующих расслоений.

Задача 7. Докажите, что L_n изоморфно $L_1^{\otimes n}$.

Рассмотрим замкнутую несамопересекающуюся кривую γ — экватор сферы — лежащую в $U \cap V$. Композиция отображения $g_{UV}|_\gamma : \gamma \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ со стандартной проекцией $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ на единичную окружность дает отображение $S^1 \to S^1$. Его степень называется степенью расслоения.

Задача 8. Вычислите степень расслоений L_1 и L_n.

Пусть s — глобальное сечение расслоения L. Тогда определены два плоских векторных поля на открытом диске: $\mathcal{X}_U(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_x^U \circ s(x)$ (в роли открытого диска выступает U) и $\mathcal{X}_V \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_x^V \circ s(x)$ (в роли открытого диска выступает V).

Задача 9. Пусть сечение s не имеет нулей на экваторе. Докажите, что разность вращений полей $\mathcal{X}_U$ и $\mathcal{X}_V$ на экваторе равна степени расслоения L.

Задача 10. Пусть сечение s имеет конечное количество нулей. Докажите, что сумма их индексов равна степени расслоения L.

Задача 11. Постройте сечения расслоений L_1 и L_n с единственным нулем. Вычислите индекс нуля.

Задача 12. Докажите, что если рассмотреть расслоение L_2 как вещественное расслоение ранга 2, то оно будет изоморфно касательному расслоению сферы $TS^2 \to S^2$.

Указание: Постройте сечение расслоения TS^2 (т.е. векторное поле на сфере) с единственным нулем, и сравните результат с задачей 11.

Задача 13. Докажите, что каждое расслоение L_n является $\mathrm{O}(1)$-расслоением.

Рассмотрим подрасслоение расслоения L_n со слоем S^1 (ср. задачу 13 и определение $3''$). По лемме Фельдбау прообразы верхней и нижней полусферы гомеоморфны $D^2 \times S^1$, т.е. полноториям. Тотальное пространство полученного расслоения представляет собой, таким образом, два полнотория, склеенные по некоторому гомеоморфизму границы.

Задача 14. Выпишите явно этот гомеоморфизм для расслоений L_1 и L_n.

Задача 15. Выпишите точную гомотопическую последовательность сферического подрасслоения комплексного векторного расслоения степени n.

Задача 16. Докажите, что тотальное пространство сферического подрасслоения расслоения L_1 есть трехмерная сфера (а само расслоение — расслоение Хопфа), а расслоения L_2 — $\mathbb{R}P^3$.