Математический Колледж НМУ **Анализ, 3 семестр**

Листок 5

Задача 1. Пусть $u(\tau,x)$ — функция двух вещественных переменных, монотонная по переменной x; $u^{-1}(\tau,x)$ — обратная функция (т.е. $u(\tau,u^{-1}(\tau,x))=x$). Пусть $u(0,x)=x$ и $\frac{\partial u}{\partial\tau}(0,x)=\ell(x)$. Вычислите $\frac{\partial^2 u}{\partial\tau\partial x}(0,x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,x)$, $\frac{\partial u^{-1}}{\partial x}(0,x)$, $\frac{\partial u^{-1}}{\partial\tau}(0,x)$, $\frac{\partial^2 u^{-1}}{\partial\tau\partial x}(0,x)$, $\frac{\partial}{\partial\tau}\big(\frac{\partial u}{\partial x}(\tau,u^{-1}(\tau,x))\big)(0,x)$.

Задача 2. Пусть $u(x)$ — диффеоморфизм прямой $\mathbb{R}^1$, т.е. монотонная гладкая функция вещественной переменной. Докажите, что дифференциал $\mathcal{D}\,u(a)$ диффеоморфизма $u(x)$ в точке a отображает линейное пространство $T_a\mathbb{R}^1$ в линейное пространство $T_{u(a)}\mathbb{R}^1$ следующим образом: вектор $\frac{\partial}{\partial x}\big|_a$ переходит в $u'(a)\,\frac{\partial}{\partial x}\big|_{u(a)}$, а остальное — по линейности (пространства одномерные !)

Указание: Напомним общее определение дифференциала гладкого отображения многообразий: пусть $U:M\to N$ — гладкое отображение многообразий. Дифференциал $\mathcal{D}\,U(a)$ отображения U в точке $a\in M$ — линейное отображение касательного пространства T_aM на касательное пространство $T_{U(a)}N$. Чтобы вычислить значение дифференциала на векторе $v\in T_aM$, нужно взять кривую $\gamma(t)$, $\gamma(0)=a$, представляющую этот вектор (касательный вектор это класс эквивалентности кривых), и рассмотреть кривую $U(\gamma(t))$ в многообразии N. Ее класс эквивалентности в точке $U(a)=U(\gamma(0))\in N$ и есть касательный вектор, являющийся образом вектора v. Для вектора $\frac{\partial}{\partial x}\big|_a\in T_a\mathbb{R}^1$ в качестве представляющей кривой можно взять $\gamma(t)=t+a$.

Задача 3. Аналогичная конструкция для тензорной степени касательного расслоения многообразия: можно вместо дифференциала рассмотреть его n-ую тензорную степень $\big(\mathcal{D}\,U(a)\big)^{\otimes n}$, действующую как линейный оператор из $(T_aM)^{\otimes n}$ в $(T_{U(a)}N)^{\otimes n}$. Выпишите соответствующую формулу для диффеоморфизма $u:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$.

Ответ: $(\frac{\partial}{\partial x}\big|_a)^{\otimes n}$ переходит в $\big(u'(a)\big)^n(\frac{\partial}{\partial x}\big|_{u(a)})^{\otimes n}$, а остальное — по линейности (пространства $(T_s\mathbb{R}^1)^{\otimes n}$ все одномерные !)

Соглашение: (-1)-ая тензорная степень линейного пространства V это сопряженное пространство V^*; $(-n)$-ая тензорная степень ($n\in\mathbb{N}$) это $(V^*)^{\otimes n}$. То же самое относится к операторам (сопряженный оператор; тензорная степень сопряженного оператора). Нулевая тензорная степень пространства V это одномерное пространство, нулевая тензорная степень оператора — единичный оператор.

Вектор из $T^*\mathbb{R}^1\stackrel{\text{def}}{=}T^{\otimes -1}\mathbb{R}^1$, двойственный к $\frac{\partial}{\partial x}\in T\mathbb{R}^1$, обозначают dx. Для удобства пишут dx^{-n} вместо $\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)^n$.

Задача 4. Действие группы диффеоморфизмов многообразия M на множество сечений расслоения $(TM)^{\otimes n}$ (где $n\in\mathbb{Z}$) таково: если сечение f сопоставляет точке a тензор $f(a)$, а U — диффеоморфизм, то $U_*(f)$ сопоставляет точке a тензор $(\mathcal{D}\,U)^{\otimes n}\big(U^{-1}(a)\big)f(U^{-1}(a))$. Докажите, что это действительно действие группы на множестве (т.е. $(U\circ V)_*(f)=U_*(V_*(f))$.

Указание: $\mathcal{D}(U\circ V)(a)=\mathcal{D}\,U(V(a))\circ\mathcal{D}\,V(a)$ (“цепное правило”, “формула для производной сложной функции”). $A^{\otimes n}\circ B^{\otimes n}=(A\circ B)^{\otimes n}$.

Задача 5. Выпишите явные формулы для действия в предыдущей задаче в случае, когда многообразие — прямая $\mathbb{R}^1$, сечение это $f(x)\,dx^{-n}$, а диффеоморфизм это монотонная функция $u(x)$.

Ответ: $u_*(f)(a)=\big(u'(u^{-1}(a))\big)^{-n}f(u^{-1}(a))dx^{-n}$; здесь dx — базисный вектор пространства $T^*_a\mathbb{R}^1$ (т.е., правильнее было бы писать $dx(a)$, но так не принято …).

Задача 6. Пусть $U(\tau)$ — семейство диффеоморфизмов многообразия M, для которого $U(0)=\mathrm{Id}$, и $(U^*)'(0)$ — векторное поле L (под U^* имеется в виду действие диффеоморфизма U на функции: $(U^*f)(a)\stackrel{\text{def}}{=}f(U^{-1}(a))$; векторное поле это дифференцирование алгебры гладких функций на многообразии M). Пусть векторное поле L действует на сечениях расслоения $(TM)^{\otimes n}$ следующим образом: значение сечения Lf в точке a это тензор $\frac{d}{d\tau}U_*(\tau)(f)\big|_{\tau=0}(a)$. Докажите, что это определение корректно (т.е. не зависит от выбора семейства $U(\tau)$) и определяет действие алгебры Ли векторных полей (т.е. $[L,N]f=L(Nf)-N(Lf)$).

Указание: Если $(U^*)'(0) = L$, $(V^*)'(0) = N$, то $(W^*)'(0) = [L, N]$, где $W(\tau) = U(\tau)V(\tau)U^{-1}(\tau)V^{-1}(\tau)$.

Задача 7. Выпишите явные формулы для действия в предыдущей задаче в случае, когда многообразие — прямая $\mathbb{R}^1$, сечение это $f(x)\,dx^{-n}$, а векторное поле L имеет вид $\ell(x)\frac{d}{dx}$.

Указание: Семейство диффеоморфизмов, порождающее векторное поле L, это просто функция $u(\tau, x)$, монотонная по x и обладающая свойствами $u(0, x) = x$, $\frac{\partial u}{\partial \tau}(0, x) = \ell(x)$. См. также задачу 1.

Ответ: $L(f) = (f'(x)\ell(x) - nf(x)\ell'(x))\,dx^{-n}$.

Задача 8. Докажите, что касательное расслоение одномерного многообразия M тривиально: $TM = M \times \mathbb{R}$.

Всякий диффеоморфизм $U : M \to M$ порождает диффеоморфизм $\tilde{U}$ многообразия TM: пара (x, v), $v \in T_xM$ переходит в $(U(x), (\mathcal{D}\,U)(x)v)$. Поэтому диффеоморфизмы многообразия M действуют не только на множестве функций (а также векторных полей, форм, тензоров и т.п.) на самом M, но и, например, на множестве функций на TM — функция $F(y)$ (где $y = (x, v)$) переходит в $F(\tilde{U}^{-1}(y))$.

Задача 9. Рассмотрим для одномерного M пространство функций на касательном расслоении $TM = M \times \mathbb{R}$ вида $s(x, q) = f(x)q^\lambda$ (здесь $x \in M$, $q \in \mathbb{R}$). Докажите, что действие группы диффеоморфизмов многообразия M на функциях на TM переводит функцию такого вида в функцию такого же вида, и выпишите это действие явно.

Ответ: такой же, как в задаче 5 при $\lambda = -n$.

Задача 10. Выпишите явно действие алгебры Ли векторных полей на одномерном многообразии M на множестве функций, описанных в предыдущей задаче.

Ответ: такой же, как в задаче 7 при $\lambda = -n$.

Пусть F_n — множество сечений n-ой тензорной степени касательного расслоения многообразия M. Говорят, что линейный функционал μ инвариантен относительно действия группы диффеоморфизмов многообразия M, если $\mu(f) = \mu(U_* f)$ для всех сечений $f \in F_n$ и диффеоморфизмов $U : M \to M$.

Задача 11. Докажите, что линейный непрерывный функционал μ инвариантен относительно действия группы диффеоморфизмов многообразия M тогда и только тогда, когда $\mu(Lf) = 0$ для всякого сечения $f \in F_n$ и всякого векторного поля L.

В следующих задачах μ — линейный непрерывный функционал на F_n, инвариантный относительно действия группы диффеоморфизмов многообразия $M = S^1$.

Задача 12. Докажите, что $\mu(f(x)\,(dx)^n) = 0$, если $f(x) = g'(x)$ для некоторой функции $g : S^1 \to \mathbb{R}$.

Задача 13. Докажите, что функция g, для которой $f(x) = g'(x)$, существует тогда и только тогда, когда $\int_{S^1} f(x)\,dx = 0$.

Задача 14. Докажите, что $\mu(f(x)\,(dx)^n) = const. \int_{S^1} f(x)\,dx$.

Задача 15. Докажите, что при $n \neq 1$ на множестве F_n не существует линейных непрерывных функционалов, инвариантных относительно действия группы диффеоморфизмов, а при $n = 1$ (т.е. на множестве 1-форм) все такие функционалы образуют одномерное линейное пространство и имеют вид $\mu(f(x)\,dx) = c_\mu \int_{S^1} f(x)\,dx$ для некоторой константы c_μ.