Листок 6

Пусть V — n-мерное линейное пространство с базисом $e_1, \dots, e_n$. k-ой внешней степенью пространства V называется подпространство $\Lambda^k V \subset V^{\otimes k}$, порожденное полностью кососимметрическими тензорами $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_\sigma (-1)^\sigma e_{\sigma(i_1)} \otimes e_{\sigma(i_2)} \otimes \dots \otimes e_{\sigma(i_k)}$. Здесь $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, сумма берется по всем перестановкам σ символов $1, 2, \dots, n$, и $(-1)^\sigma$ — четность перестановки σ.

Задача 1. Найдите размерность пространства $\Lambda^k V$; особое внимание обратите на случаи $k = 1$, $k = n$ и $k > n$.

Определение 1. k-формой на n-мерном многообразии M называется сечение расслоения $\Lambda^k T^* M$.

Задача 2. Запишите общий вид k-формы на n-мерном многообразии M в локальных координатах; особое внимание обратите на случаи $k = 0$, $k = 1$ и $k = n$.

Пусть $F_k(M)$ множество кососимметрических функций на M^k (функция меняет знак при обмене местами любых двух аргументов). Обозначим $J_k(M)$ идеал в кольце $F_k(M)$, состоящий из функций f, удовлетворяющих условию $f(a, a + t_2, \dots, a + t_k) = o((|t_2| + \dots + |t_k|)^{k-1})$ при $t_2, \dots, t_k \to 0$. Здесь $t_2, \dots, t_k$ — малые приращения, которые поэтому могут считаться элементами $\mathbb{R}^n$, так что символ $|t_i|$ имеет смысл, хотя и зависит от системы координат (на многообразии M в окрестности точки a).

Задача 3. Докажите, что идеал J_k, тем не менее, от системы координат не зависит.

Определение 2. k-формой на многообразии M называется элемент фактора $F_{k+1}(M)/J_{k+1}(M)$.

Например, если $M = \mathbb{R}^2$, то $f \in F_3(\mathbb{R}^2)$ есть, тем самым, функция 6 переменных: $f(a_1, a_2, a_3) = f(x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3)$ (здесь $a_1 = (x_1, y_1)$, $a_2 = (x_2, y_2)$ и $a_3 = (x_3, y_3)$ — точки $\mathbb{R}^2$).

Задача 4. Докажите, что для функции $f \in F_3(\mathbb{R}^2)$ выполнены равенства $f(a, a, a) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a, a, a) = \frac{\partial f}{\partial y_1}(a, a, a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial y_3}(a, a, a) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(a, a, a) = \frac{\partial^2 f}{\partial {y_1}^2}(a, a, a) = \dots = \frac{\partial^2 f}{\partial {y_3}^2}(a, a, a) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1}(a, a, a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial y_2}(a, a, a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial y_3}(a, a, a) = 0$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_2}(a, a, a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial y_3}(a, a, a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial y_1}(a, a, a) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_3}(a, a, a) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial y_1}(a, a, a) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial y_2}(a, a, a)$

Задача 5. Пусть $f \in F_3(\mathbb{R}^2)$. Докажите, что $f \in J_3(\mathbb{R}^2)$ тогда и только тогда, когда $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_2}(a, a, a) \equiv 0$.

Задача 6. Найдите, используя результаты задач 4 и 5, общий вид 2-формы на $\mathbb{R}^2$, где "2-форма" понимается в смысле определения 2. Сравните ответ с результатом задачи 2.

Задача 7. Докажите, что для функции $f \in F_3(\mathbb{R}^3)$ все частные производные 1 порядка равны 0 в точках вида (a, a, a, a) (где $a \in \mathbb{R}^3$). Найдите все соотношения между значениями в этих точках частных производных 2 порядка.

Ответ: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial y_3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial y_1} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial y_1} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial y_2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial z_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial z_3} = \dots = -\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial z_3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial z_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial z_3} = \dots = -\frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial z_3}$; остальные частные производные 2 порядка равны 0.

Задача 8. Решите аналог задачи 6 для 2-форм в $\mathbb{R}^3$.

Задача 9. Докажите, что для функции $f \in F_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ все частные производные до $k-1$ порядка включительно равны 0 в точках вида $(a, \dots, a)$ (где $a \in \mathbb{R}^n$). Найдите все соотношения между частными производными порядка k. Запишите общий вид k-формы в $\mathbb{R}^n$ и сравните ответ с результатом задачи 2.

Ответ: $\sum\limits_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge \dots dx_{i_k}$.