Листок 7

Пусть $U : M \to N$ — дифференцируемое отображение многообразий, и $f \in F_k(N)$ — кососимметрическая функция на N^k. Тогда функция $U^*f \in F_k(M)$ определяется равенством $U^*f(a_1,\ldots,a_k) \stackrel{\text{def}}{=} f(U(a_1),\ldots,U(a_k))$; здесь $a_1,\ldots,a_k$ — точки многообразия M.

Задача 1. Докажите, что если $f \in J_k(N)$, то $U^*f \in J_k(M)$.

Из задачи 1 следует, что если $\omega \in F_{k+1}(N)/J_{k+1}(N)$ — k-форма на N, то корректно определена k-форма $U^*\omega$ на M.

Если D_t — семейство диффеоморфизмов многообразия M, представляющее векторное поле L, то определено также и действие векторного поля L на формы: $L\omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}D_t^*\omega\big|_{t=0}$.

Задача 2. Напишите формулу для $U^*\omega$ и $L\omega$, если

1. $\omega = a(x)\,dx$ — 1-форма на $\mathbb{R}^1$, U — диффеоморфизм прямой (т.е. монотонная функция $U(x)$), L — векторное поле на прямой ($\ell(x)\,\frac{d}{dx}$). Сравните ответ с результатами листка 5.
2. $\omega = d\varphi$ — "угловая" форма на окружности $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, отображение U задано формулой $U(z) = z^n$, а L — "угловое" векторное поле $\frac{d}{d\varphi}$
3. $\omega = a(x)\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ — произвольная n-форма на $\mathbb{R}^n$, U — произвольный диффеоморфизм $\mathbb{R}^n$, заданный формулой $U(x_1,\ldots,x_n) = (y_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,y_n(x_1,\ldots,x_n))$, L — векторное поле, заданное формулой $L(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\partial}{\partial x_1}$.
4. $\omega = \sum_{i=1}^n a_i(x)\,dx_i$ — произвольная 1-форма на $\mathbb{R}^n$, $U : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$ — вложение $t \mapsto (t,0,\ldots,0)$.
5. $\omega = dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dx$ — 2-форма в $\mathbb{R}^3$, $U : S^2 \to \mathbb{R}^3$ — вложение единичной сферы.
6. ω — форма на S^2, полученная в предыдущем пункте, $U : S^2 \to S^2$ — произвольное ортогональное преобразование (движение сферы).

Указания:

1. В качестве функции $f \in F_2(\mathbb{R}^1)$, представляющей форму $a(x)\,dx$, можно взять любую функцию $f(x,y)$, для которой $f(y,x) = -f(x,y)$ и $\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = a(x)$. Например, подходит $f(x,y) = \int_y^x a(t)\,dt$.
2. В качестве функции $f \in F_2(S^1)$, представляющей форму $d\varphi$, можно взять $f(\varphi_1,\varphi_2) = \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$. В качестве семейства диффеоморфизмов, представляющего поле L, можно взять $D_t(z) = \exp itz$.
3. В качестве семейства диффеоморфизмов $\mathbb{R}^n$, представляющего поле $\frac{\partial}{\partial x_1}$, можно взять $D_t(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (x_1+t,x_2,\ldots,x_n)$.

Пусть L — векторное поле на многообразии M, представленное семейством диффеоморфизмов D_t, и $f \in F_k(M)$. Тогда функция $\iota_L f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}f(D_t(a_1),a_2,\ldots,a_k)\big|_{t=0}$ принадлежит $F_{k-1}(M)$. Иными словами $\iota_L f$ можно определить как результат применения дифференциального оператора L к функции $f(a_1,\ldots,a_k)$, которая рассматривается как функция только переменной a_1, а значения остальных фиксированы.

Задача 3. Докажите, что если $f \in J_k(M)$, то $\iota_L f \in J_{k-1}(M)$.

Из задачи 3 следует, что если $\omega \in F_{k+1}(M)/J_{k+1}(M)$ — k-форма на M, то корректно определена $(k-1)$-форма $\iota_L\omega$.

Задача 4. Докажите, что $\iota_L df = L(f)$, где f — произвольная функция на многообразии M.

Задача 5. Вычислите $\iota_L\omega$ для примеров, приведенных в задаче 2.

Пусть $\varphi \in C^\infty(M)$ — произвольная функция на M, $f \in F_k(M)$. Тогда функция $f_\varphi = \frac{1}{k}(\varphi(a_1)+\ldots+\varphi(a_k))f(a_1,\ldots,a_k)$ также принадлежит $F_k(M)$.

Задача 6. Докажите, что если $f \in J_k(M)$, то $f_\varphi \in J_k(M)$.

Из задачи 6 следует, что если $\omega \in F_{k+1}(N)/J_{k+1}(N)$ — k-форма на M, то корректно определена k-форма $omega_\varphi$.

Задача 7. Докажите, что функция $f(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}; \dots; x_1^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1^{(1)} & \dots & x_1^{(k+1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_k^{(1)} & \dots & x_k^{(k+1)} \end{vmatrix}$ принадлежит $F_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ и представляет форму $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$. Найдите функцию $f_{i_1 \dots i_k}$, представляющую форму $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$.

Задача 8. Вычислите форму ω_φ для произвольной функции $\varphi(x)$ и формы $\omega = a(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ в $\mathbb{R}^n$; для произвольной k-формы ω в $\mathbb{R}^n$.

Результаты задач 7 и 8 позволяют, в принципе, выписать явно представляющую функцию для любой формы в $\mathbb{R}^n$, заданной в координатах (см. конец листка 6).

Задача 9. Докажите, что операция $(\varphi, \omega) \mapsto \omega_\varphi$ задает в множестве k-форм структуру модуля над алгеброй $C^\infty(M)$. Иными словами, $\omega_{p\varphi+q\psi} = p\omega_\varphi + q\omega_\psi$ и $(\omega_\varphi)_\psi = \omega_{\varphi\psi}$.

Ввиду задачи 9 (и задачи 8) вместо ω_φ пишут $\varphi\omega$.

Задача 10. Вычислите $\iota_L(\varphi\omega)$ и $\iota_{\varphi L}\omega$.