Листок 9

Пусть $f \in F_k(M)$. Определим функцию ∂f равенством $(\partial f)(a_1, \dots, a_{k+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} f(a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_{k+1})$; здесь $\widehat{a_i}$ означает, что i-й аргумент пропущен.

Задача 1. Докажите, что $\partial f \in F_{k+1}(M)$. Докажите, что если $f \in J_k(M)$, то $\partial f \in J_{k+1}(M)$.

Из задачи 1 следует, что если $\omega \in F_{k+1}(N)/J_{k+1}(N)$ — k-форма на M, то определена $k+1$-форма $d\omega$.

Задача 2. Докажите, что d — линейный оператор, и $dd\omega = 0$ для всякой формы ω.

Задача 3. Докажите, что если f — функция (т.е., 0-форма) на M, то выражение df означает то же, что и раньше.

Задача 4. Вычислите $d\omega$ для

1. Формы $x\,dy$ в $\mathbb{R}^2$.
2. Произвольной 1-формы $a_1(x)\,dx_1 + \ldots + a_n(x)\,dx_n$ в $\mathbb{R}^n$. Особо выпишите случаи $n = 2$ и $n = 3$ («ротор векторного поля»).
3. 2-формы $a_1(x)\,dx_2 \wedge dx_3 + a_2(x)\,dx_3 \wedge dx_1 + a_3(x)\,dx_1 \wedge dx_2$ в $\mathbb{R}^3$ («дивергенция векторного поля»).
4. Произвольной k-формы на $\mathbb{R}^n$, заданной в координатах.

Указание: Представляющие функции для форм выбирайте, как в листке 7. В силу задачи 2 достаточно получить результат для каждого слагаемого в отдельности.

Задача 5. Пусть τ — симплициальное разбиение компактного ориентированного n-мерного многообразия M с краем ∂M, а ω — некоторая $(n-1)$-форма. Докажите, что интегральная сумма (по симплексам разбиения τ) формы $d\omega$ равна интегральной сумме формы ω по ограничению разбиения τ на ∂M. В частности, если край отсутствует, то сумма равна 0.

Указание: Всякий $(n-1)$-мерный симплекс разбиения τ, не лежащий на границе, входит в 2 n-мерных симплекса, а лежащий на границе — в 1.

Задача 6. Докажите, что 1-форма $a(\varphi)\,d\varphi$ на S^1 является дифференциалом функции тогда и только тогда, когда $\int_{S^1} a(\varphi)\,d\varphi = 0$.