Комбинаторные структуры в топологии
Спецкурс в МК НМУ, осень 1998

С.В.Дужин (duzhin@botik.ru)

Лекция 1

Три определения (три ступени абстракции)

1. (Детское) Граф – это набор точек (вершин) и соединяющих их линий (ребер).

2. (Обычное) Граф – это конечное множество V (вершины) и выделенное симметричное подмножество декартова квадрата $V \times V$ (ребра).

3. (М.Концевич). Граф — это множество со свободной инволюцией и отношением эквивалентности.

Определение. Графом Мура называется регулярный граф степени k, порядка k^2+1 и диаметра 2.

Пояснения. Рассматриваются неориентированные графы без кратных ребер и петель. Степень (валентность) — число ребер, выходящих их вершины. Граф называется регулярным, если степени всех вершин равны. Порядок графа — число вершин. Диаметр графа — максимум расстояния между вершинами для всех пар вершин. Расстояние между вершинами — наименьшее число ребер, которые нужно пройти, чтобы добраться из одной вершины в другую.

Теорема. Графы Мура существуют для $k = 1, 2, 3, 7$ и, быть может, 57.

Пояснение. Это значит, что для значений k, кроме перечисленных, графов Мура не существует. Графы Мура степени 1, 2, 3 и 7 существуют и хорошо известны. До сих пор неизвестно, существует ли граф Мура степени 57.

Схема доказательства.

1. Граф степени k и порядка k^2+1 является графом Мура тогда и только тогда, когда он не содержит циклов длины 3 и 4.

2. Если A – матрица смежности графа Мура, то она удовлетворяет уравнению

$$A^3 - (k-1)A^2 - (2k-1)A + k(k+1) = 0.$$

3. Собственные значения $\lambda_{1,2}$ матрицы A, отличные от 1, и их кратности $m_{1,2}$ удовлатворяют системе уравнений

$$m_1 + m_2 \quad = \quad k^2,$$

$$l_1 m_1 + l_2 m_2 = -k,$$
$$l_1 + l_2 = -1.$$

4. Если $k \neq 2$, то $m_1 \neq m_2$ и, следовательно, числа l_1 и l_2 рациональны. На самом деле $l_i = (-1 \pm t)/2$, где где t — целое число, удовлетворяющее уравнению

$$t^4 - 2t^2 - 16(m_1 - m_2)t - 15 = 0.$$

Отсюда вытекает, что $t = 1$, 3, 5 или 15.

Граф Мура степени 1 — это K_2 (полный граф с 2 вершинами), степени 2 — пятиугольник C_5. Графы Мура степеней 3 и 7 тоже существуют и единственны с точностью до изоморфизма. Это граф Петерсена P_{10} и граф Хоффмана–Синглтона HS_{50}.

Граф Петерсена состоит из двух пятиугольников C_5, вершины которых соединены между собой еще пятью ребрами по правилу $x \mapsto 2x$ по модулю 5 (если вершины каждого цикла C_5 нумеровать вычетами по модулю 5).

Граф Хоффмана–Синглтона можно построить так. Возьмем граф $K_{5,5}$ (полный двудольный граф с 5+5 вершинами, т.е. граф "5 домиков и 5 колодцев", которые будем представлять себе расположенными в виде двух горизонтальных рядов). Каждую вершину этого графа заменим на цикл C_5, а каждое ребро — на пятерку ребер, осуществляющих взаимно-однозначное соответствие между вершинами этих циклов по тому же пригципу, что и в графе Петерсена. Точнее, из вершины x i-го "домика" проведем ребро в вершину j-го колодца с номером $2x + ij \bmod 5$.

Определение. Отображение графов — это отображение множеств вершин, которое сохраняет отношение смежности и, таким образом, индуцирует вполне определенное отображение на множестве ребер.

Определение. Граф H является m-листным (комбинаторным) накрытием графа G, если существует отображение графов $p : H \to G$ такое, что прообраз любой вершины $v \in V(G)$ состоит из m вершин, не соединенных ребрами, а прообраз любого ребра состоит из m ребер, не имеющих общих концов.

Замечание. Всякое комбинаторное накрытие является также топологическим накрытием. Обратное неверно.

Группа монодромии накрытия над точкой базы $v \in V(G)$ — это группа перестановок слоя $p^{-1}(v)$, порожденная поднятиями всех замкнутых путей в графе G, начинающихся и заканчивающихся в точке V.

Наблюдение. Если из графа Мура выбросить какую-то вершину и все смежные с ней вершины, то останется граф, который является $k-1$-листным накрытием полного графа K_k. Монодромия этого накрытия не имеет неподвижных точек над циклами в базе длины 3 и 4.

Задачи

1. Проверить, что описанная выше конструкция графа Хоффмана-Синглтона действительно приводит к графу диаметра 2.

2. Доказать несуществование графа Мура степени 4 путем подсчета числа циклов длины 5, проходящих через фиксированную его вершину.

3. Построить граф Хоффмана–Синглтона через 6-листное накрытие над K_7, монодромия которого над циклами длины 3 и 4 не имеет неподвижных точек.

4. Классифицировать накрытия: а. двулистные над C_3. б. двулистные над K_4. в. трехлистные над C_3.

Проблема. Выяснить, существует ли граф Мура степени 57.