Комбинаторные структуры в топологии
Спецкурс в МК НМУ, осень 1998

С.В.Дужин (duzhin@botik.ru)

Лекция 2

Конструкция Зайделя

Пусть P — множество точек трехмерного проективного пространства над полем $\mathbf{Z}_2$, а L — множество прямых в нем же. Положим $V = P \cup L$. Это множество мощности 50, которое мы примем за множество вершин графа. Ребра определяются так: 1. между $p_1, p_2 \in P$ ребер нет. 2. $p \in P$ соединяется ребром с $l \in L$, если точка p принадлежит прямой l. 3. для того, чтобы определить смежность между прямыми $l_1, l_2 \in L$, построим вначале взаимно-однозначное соответствие между L и множеством всех троек точек некоторого вспомогательного множества M, при котором две прямые l_1 и l_2 пересекаются в проективном пространстве тогда и только тогда, когда две соответствующие тройки имеют ровно одну общую точку. Тогда прямые l_1 и l_2 соединяются ребром в том и только том случае, когда соответствующие тройки не имеют оющих точек.

Описание некоторых простых комбинаторных объектов, возможно, связанных с графом Хоффмана-Синглтона,

1. Проективная плоскость из 7 точек – набор семи троек, составленных из данных семи точек так, что каждая пара точек принадлежит ровно одной тройке, а каждые две тройки имеют ровно одну общую точку.

2. Семицветная карта на торе – регулярный паркет из правильных шестиугольников на плоскости можно раскрасить в 7 цветов так, что получится дважды периодический узор. Таким образом, каждый их 7 цветов определяет некоторый циклический порядок в множестве остальных 6 цветов.

3. Полиэдр Часара – многогранник в трехмерном пространстве, имеющий 7 вершин, 21 ребро и 14 треугольных граней и гомеоморфный тору. С комбинаторной точки зрения, речь идет о наборе 14 троек из данных 7 точек, который обладает некоторыми специальными свойствами.

Прямое произведение. Прямым произведением графов G и H называется граф с множеством вершин $V(G) \times V(H)$, в котором вершины

(u_1, v_1) и (u_2, v_2) соединяются ребром, если либо $u_1 = u_2$, а (v_1, v_2) — ребро в H, либо $v_1 = v_2$, а (u_1, u_2) — ребро в G.

Пример. Если K_2 — отрезок, то $K_2 \times K_2 = C_4$ — квадрат.

Ребра в прямом произведении условно можно разделить на вертикальные и горизонтальные. Если разрешить, чтобы горизонтальные ребра были не строго горизонтальны, а слегка подкручены, то мы придем к понятию расслоения, или косого произведения.

Определение. Отображение графов $p : E \to B$ называется расслоением со слоем F, если прообраз любой вершины базы есть граф, изоморфный F, а прообраз любого ребра (v_1, v_2) состоит из одного и того же числа ребер, соединяющих вершины графов $p^{-1}(v_1)$ и $p^{-1}(v_2)$ так, что получается взаимно-однозначное соответствие между этими двумя множествами.

Если полный прообраз любого подграфа $K_2 \subset B$ (ребра с двумя концами) представляет собой один и тот же граф C, с точностью до изоморфизма, то говорят, что речь идет о расслоении типа C.

Важный пример: расслоение Петерсена — это расслоение типа P_{10} со слоем C_5, т.е. расслоение, в котором над каждой точкой базы висит пятиугольник, а разные пятиугольники соединяются между собой скручиванием Петерсена (отображением вида $x \mapsto \pm 2x + a$ в смысле поля вычетов $\mathbf{Z}_5$). К этому классу относятся графы Петерсена и Хоффмана-Синглтона.

Замечание. В отличие от понятия накрытия, расслоения графов, определенные комбинаторным образом, не имеют ничего общего с понятием расслоения в топологии, так как размерность пространства расслоения равна сумме размерностей базы и слоя.

Правильным аналогом размерности для регулярных графов является валентность. Некоторые классические многообразия имеют вполне очевидные аналоги в категории графов, например, K_n — n-мерная сфера, K_2^n — n-мерный тор, C_n — замкнутая ориентируемая поверхность рода $n - 3$.

Предложение. Спектр прямого произведения графов равен сумме спектров сомножителей.

Теорема о спектре расслоения Петерсена. Спектр любого расслоения Петерсена над графом B состоит из собственных чисел графа D, сдвинутых на 2, и, кроме того, некоторого набора собственных значений, который можно разбить на пары так, что сумма чисел в каждой паре равна -1.

Задачи.

1. Проверить, что конструкция Зайделя дает граф диаметра 2.

2. Пользуясь материалами предыдущей лекции, найти спектры графов Мура P_{10} и HS_{50} и проверить для них выполнение теоремы о спектре расслоения Петерсена.

3. Если бы граф Мура степени 57 существовал и представлялся как расслоение Петерсена, то что можно сказать о спектре базы этого расслоения?

4. Классифицировать расслоения: а. над C_n со слоем K_2, б. над K_4 со слоем K_2, в. над K_2 со слоем C_n.

Проблема. Можно ли построить содержательную теорию гомологий или гомотопий в категории регулярных графов, в которой аналогом размерности была бы степень (валентность) графа? Хочется, чтобы n-я группа гомологий сферы была нетривиальной, и при этом существовал бы некий аналог точной последовательности расслоения.