# Комбинаторные структуры в топологии
# Упражнения, задачи и проблемы

С.В.Дужин

21 декабря 1998

1) Найдите взаимно-однозначное соответствие между всеми неупорядоченными парами чисел 1..6 и перестановками на 6 символах, состоящими из 3 транспозиций, которое приводит к 6-листному накрытию графа $K_7$, монодромия которого над циклами длины 3 и 4 не имеет неподвижных точек.

2) Пусть $K_n$ — полный граф с $n$ вершинами. Классифицируйте:

   а) трехлистные накрытия над $K_3$,

   б) расслоения над $K_4$ со слоем $K_2$,

3) а) Найдите размерность и укажите какой-нибудь базис пространства $A_n$ для $n \leqslant 3$, выписав все 4-членные соотношения между соответствующими хордовыми диаграммами.

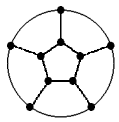
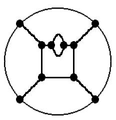
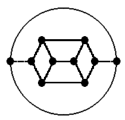
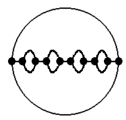
   б) Выпишите все $STU$-соотношения между диаграммами Фейнмана порядка $\leqslant 3$, найдите размерность и укажите какой-нибудь базис пространства $\mathcal{F}_n$ для $n \leqslant 3$.

   в) Выпишите все соотношения между китайскими иероглифами порядка $\leqslant 3$, найти размерность и базис пространств $\mathcal{B}_n$ для $n \leqslant 3$.

   г) В найденных базисах укажите явный вид изоморфизмов $\mathcal{A} = \mathcal{F} = \mathcal{B}$.

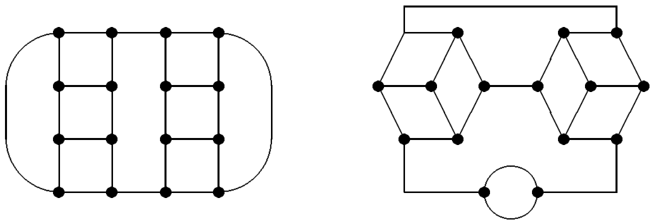
   д) Составьте таблицу умножения до градуировки 3 в алгебре $\mathcal{F}$ для операции умножения, перенесенной из $\mathcal{B}$ вдоль изоморфизма $\mathcal{F} = \mathcal{B}$.

4) Докажите следующее тождества в алгебре диаграмм Фейнмана:

 $=$ $(3/4)$  $+ (1/12)$  $- (1/48)$  .

5) Докажите линейную независимость трех элементов, стоящих в правой части последнего равенства, вычислив на них значения $gl_N$-инварианта.

6) Приведите явную цепочку $IHX$-соотношений, которая доказывает равенство следующих двух элементов в алгебре 3-графов $\Gamma$:



7) Пусть $\mathcal{A}^*$ — алгебра линейных функций на хордовых диаграммах с 4-членным соотношением, а $\tilde{A}^*$ — алгебра линейных функций на хордовых диаграммах с 1-членным и 4-членным соотношениями. Имеется естественное вложение $\tilde{A}^* \to \mathcal{A}^*$. Укажите явную формулу для проекции $\mathcal{A}^* \to \tilde{A}^*$, расщепляющей это вложение.

8) Вычислите гомологии граф-комплекса Концевича $G^{(4)}$ посредством прямых вычислений (найдите все ненулевые графы, порождающие $G_k^{(4)}$, $k = 3, \ldots, 6$ и сосчитайте на них дифференциал).

9) $^*$ Доказать, что ориентация графа по Концевичу, т.е. ориентация пространства $\mathbf{R}^{E(\Gamma)} \oplus H^1(\Gamma, \mathbf{R})$, эквивалентна ориентации графа по Шойхету, которая определяется через нумерацию вершин и расстановку стрелок на ребрах. Точнее говоря, доказать, что автоморфизм графа сохраняет ориентацию пространства $\mathbf{R}^{E(\Gamma)} \oplus H^1(\Gamma, \mathbf{R})$ тогда и только тогда, когда он либо осуществляет четную перестановку вершин и меняет направление четного числа ребер, либо нечетную перестановку вершин и меняет направление у нечетного числа ребер.

## Открытые проблемы

1) Существует ли граф Мура степени 57?

2) Верно ли, что всякая хордовая диаграмма равна своему зеркальному отражению по модулю 4-членных соотношений?

3) Верно ли, что китайский иероглиф с тремя одновалентными вершинами всегда равен нулю, как элемент алгебры $\mathcal{B}$?

4) Верно ли, что оператор умножения на “пузырь” (в алгебрах $\mathcal{F}$, $\Gamma$ или $\Lambda$) не имеет ядра?